

3. Trygonometria

Zadanie 3.1. [matura, maj 2010, zad. 2. (4 pkt)]

Wyznacz wszystkie rozwiązania równania $2\cos^2 x - 5\sin x - 4 = 0$ należące do przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadanie 3.2. [matura, sierpień 2010, zad. 1. (4 pkt)]

Wyznacz wszystkie rozwiązania równania $2\sin^2 x - 7\cos x - 5 = 0$ należące do przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadanie 3.3. [matura, maj 2011, zad. 4. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $2\sin^2 x - 2\sin^2 x \cdot \cos x = 1 - \cos x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadanie 3.4. [matura, czerwiec 2011, zad. 4. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $6\sin^2 x + 7\cos x - 1 = 0$ dla $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

✓ **Zadanie 3.5.** [matura, maj 2012, zad. 3. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $\cos 2x + 2 = 3\cos x$.

✓ **Zadanie 3.6.** [matura, czerwiec 2012, zad. 3. (5 pkt)]

5 Kąt α jest taki, że $\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{4}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $|\cos \alpha - \sin \alpha|$.

Zadanie 3.7. [matura, maj 2013, zad. 4. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ dla $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

✓ **Zadanie 3.8.** [matura, czerwiec 2013, zad. 3. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $2\lg x \cdot \cos x + 1 = 2\cos x + \lg x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadanie 3.9. [matura, czerwiec 2013, zad. 8. (3 pkt)]

✓ Wykaż, że dla dowolnego kąta α prawdziwa jest tożsamość $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{1 + \cos^2 2\alpha}{2}$

Zadanie 3.10. [matura, maj 2014, zad. 3. (4 pkt)]

✓ Rozwiąż równanie $\sqrt{3} \cdot \cos x = 1 + \sin x$ w przedziale $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

✓ **Zadanie 3.11.** [matura, czerwiec 2014, zad. 4. (4 pkt)]

Rozwiąż nierówność $-2\sin 3x \geq 1$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadanie 3.12. [matura, maj 2015, zad. 4. (1 pkt)]

Równanie $2\sin x + 3\cos x = 6$ w przedziale $(0, 2\pi)$

- A. nie ma rozwiązań rzeczywistych.
- B. ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste.
- C. ma dokładnie dwa rozwiązania rzeczywiste.
- D. ma więcej niż dwa rozwiązania rzeczywiste.

Zadanie 3.13. [matura, maj 2015, zad. 5 swe. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $\sin^2 2x - 4\sin^2 x + 1 = 0$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadanie 3.14. [matura, czerwiec 2015, zad. 4. (1 pkt)]

Dla dowolnego kąta α wartość wyrażenia $\sin \alpha + \sin (180^\circ - \alpha)$ jest równa wartości wyrażenia

A. $\sin 2\alpha$ B. $-\sin \alpha$ C. $2\sin \alpha$ D. 0

Zadanie 3.15. [matura, czerwiec 2015, zad. 10. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $(4\sin^2 x - 1) \cdot \sin x = \cos^2 x - 3\sin^2 x$, dla $x \in (-\pi, 0)$.

Zadanie 3.16. [matura, czerwiec 2015, zad. 3 swe. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $\sin 2x + \sqrt{3} \sin x = 0$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadanie 3.17. [matura, maj 2016, zad. 11. (4 pkt)]

Rozwiąż nierówność $\frac{2\cos x - \sqrt{3}}{\cos^2 x} < 0$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

✓ **Zadanie 3.18.** [matura, czerwiec 2016, zad. 2. (1 pkt)]

Wartość wyrażenia $\sin^2 75^\circ - \cos^2 75^\circ$ jest równa

A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

✓ **Zadanie 3.19.** [matura, czerwiec 2016, zad. 13. (3 pkt)]

Rozwiąż nierówność $(2\sin x - 3)(2\sin x + 1) > 0$ w przedziale $x \in (0, 2\pi)$.

• **Zadanie 3.20.** [matura, czerwiec 2016, zad. 14. (4 pkt)]

W trójkącie prostokątnym stosunek różnicy długości przyprostokątnych do długości przeciwprostokątnej jest równy $\frac{1}{2}$. Oblicz cosinusy kątów ostrych tego trójkąta.

• **Zadanie 3.21.** [matura, czerwiec 2016, zad. 4 swe. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $\sin^3 x - 3\sin x \cdot \cos^2 x - 3\cos^3 x + \sin^2 x \cdot \cos x = 0$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.

Zadanie 3.22. [matura, maj 2017, zad. 10. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $\cos 2x + 3\cos x = -2$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadanie 3.23. [matura, czerwiec 2017, zad. 11. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $3\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

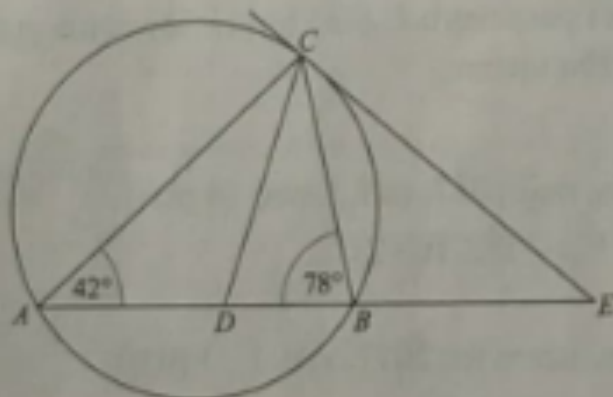
Zadanie 3.24. [matura, czerwiec 2017, zad. 4 swe. (5 pkt)]

Rozwiąż równanie $2\cos^4 x + 5\sin^2 x = 3$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.

5. Planimetria

Zadanie 5.1. [matura, sierpień 2010, zad. 8. (4 pkt)]

Odcinek CD jest zawarty w dwusiecznej kąta ACB trójkąta ABC . Kąty trójkąta ABC mają miary: $|\angle CAB| = 42^\circ$, $|\angle ABC| = 78^\circ$. Styczna do okręgu opisanego na tym trójkącie w punkcie C przecina prostą AB w punkcie E (zobacz rysunek).



Oblicz, ile stopni ma każdy z kątów trójkąta CDE .

Zadanie 5.2. [matura, maj 2011, zad. 6. (4 pkt)]

Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC ma długość 8 oraz $|\angle BAC| = 30^\circ$. Oblicz długość środkowej AD tego trójkąta.

Zadanie 5.3. [matura, czerwiec 2011, zad. 7. (4 pkt)]

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $|AC| = 5$ i $|AB| = 8$. Pole tego trójkąta jest równe $10\sqrt{3}$. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Zadanie 5.4. [matura, maj 2012, zad. 9. (5 pkt)]

Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = a$, $|BC| = b$ i $a > b$. Odcinek AE jest wysokością trójkąta DAB opuszczoną na jego bok BD . Wyraż pole trójkąta AED za pomocą a i b .

Zadanie 5.5. [matura, czerwiec 2012, zad. 8. (5 pkt)]

W czworokącie $ABCD$ dane są długości boków: $|AB| = 24$, $|CD| = 15$, $|AD| = 7$. Ponadto kąty DAB oraz BCD są proste. Oblicz pole tego czworokąta oraz długości jego przekątnych.

Zadanie 5.6. [matura, maj 2013, zad. 9. (5 pkt)]

Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AC| = 17$ i $|BC| = 10$. Na boku AB leży punkt D taki, że $|AD| : |DB| = 3 : 4$ oraz $|DC| = 10$. Oblicz pole trójkąta ABC .

Zadanie 5.7. [matura, czerwiec 2013, zad. 6. (5 pkt)]

W równoległoboku $ABCD$ miara kąta ostrego jest równa 30° , a odległości punktu przecięcia się przekątnych od sąsiednich boków równoległoboku są równe 2 i $\sqrt{3}$. Oblicz długość krótszej przekątnej tego równoległoboku.

Zadanie 5.8. [matura, maj 2014, zad. 9. (5 pkt)]

Dane są trzy okręgi o środkach A, B, C i promieniach równych odpowiednio $r, 2r, 3r$. Każde dwa z tych okręgów są zewnętrznie styczne: pierwszy z drugim w punkcie K , drugi z trzecim w punkcie L i trzeci z pierwszym w punkcie M . Oblicz stosunek pola trójkąta KLM do pola trójkąta ABC .

Zadanie 5.9. [matura, czerwiec 2014, zad. 2. (4 pkt)]

W czworokąt $ABCD$, w którym $|AD| = 5\sqrt{3}$ i $|CD| = 6$, można wpisać okrąg. Przekątna BD tworzy z bokiem AB czworokąta kąt o mierze 60° , natomiast z bokiem AD tworzy kąt, którego sinus jest równy $\frac{3}{4}$. Wyznacz długości boków AB i BC oraz długość przekątnej BD tego czworokąta.

Zadanie 5.10. [matura, maj 2015, zad. 10. (4 pkt)]

Długości boków czworokąta $ABCD$ są równe: $|AB| = 2$, $|BC| = 3$, $|CD| = 4$, $|DA| = 5$. Na czworokącie $ABCD$ opisano okrąg. Oblicz długość przekątnej AC tego czworokąta.

Zadanie 5.11. [matura, maj 2015, zad. 8 swe. (4 pkt)]

Na boku AB trójkąta równobocznego ABC wybrano punkt D taki, że $|AD| : |DB| = 2 : 3$. Oblicz tangens kąta ACD .

Zadanie 5.12. [matura, czerwiec 2015, zad. 11. (4 pkt)]

W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 15 i 20 wpisano okrąg. Oblicz długość odcinka łączącego wierzchołek kąta prostego tego trójkąta z punktem wspólnym okręgu i przeciwprostokątnej.

Zadanie 5.13. [matura, czerwiec 2016, zad. 3. (1 pkt)]

W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD dane są: $|AD| = 6$, $|BC| = 12$, $|AC| = 10$ oraz $\angle ABC = \angle CAD$ (zobacz rysunek).

