Zestaw 1 - Liczby rzeczywiste

A Teoria

Co trzeba sobie powtórzyć?/Co trzeba umieć? Materiał ze szkoły śrdeniej oraz z logiki i teorii mnogości, szczególnie:

a. algebra zbiorów

b. rachunek kwantyfikatorów

c. iloczyn kartezjański

d. nierówności stopnia I z jedną niewiadomą

e. równania i nierówności modułowe

f. nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą

Definicja. A.1. *(Nierówność trójkąta)*
Jeżeli $a, b \in \mathbb{R}$, to:

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|.$$

Równoważnie:

$$||a| - |b|| \leqslant |a+b|$$

Definicja. A.2. *(Średnie liczbowe)*
Dla liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ definiujemy następujące średnie:

średnia kwadratowa:

$$K_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$$

średnia kwadratowa:

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

średnia geometryczna:

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

średnia harmoniczna:

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

Definicja. A.3. *(Nierówność między średnimi)*

$$K_n \geqslant A_n \geqslant G_n \geqslant H_n$$

Równości między renimi zachodzą wtedy i tylko wtedy gdy liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są równe.

Definicja. A.4. *(Symbol Newtona)*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Definicja. A.5. *(Dwumian Newtona)*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

B Zadania

Zadanie B.1. Znaleźć siódmy wyraz rozwinięcia $(2a + b^2)^8$.

Zadanie B.2. Wykaż, że suma wszystkich współczynników w rozwinięciu dwumianu Newtona $(a+b)^n$ wynosi 2^n, tzn. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Zadanie B.3. Do jakiej potęgi należy podnieść dwumian $a + b$, aby w rozwinięciu suma wykładników potęg liczby a we wszystkich wyrazach wynosiła 120?

Zadanie B.4. Udowodnij wzór na n-ty wyraz $a_n = a_1 q^{n-1}$ postępu geometrycznego.

Zadanie B.5. Udowodnij wzór na sumę n pierwszych wyrazów postępu geometrycznego.

Zadanie B.6. Wykaż, że $3^{4n+2} + 1$ jest liczbą podzielną przez 10 dla $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie B.7. Udowodnij indukcyjnie, że dla wszystkich $n \geqslant 1$:

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
b) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$,
c) $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$,

Zadanie B.8. Udowodnij indukcyjnie, że dla wszystkich $n \geqslant 1$:

a) $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9s$,
b) $11^{n+2} + 12^{2n+1} = 133s$,
c) $6^{n+2} + 7^{2n+1} = 43s$,
d) $2^{6n+1} + 3^{2n+2} = 11s$,
e) $5 \cdot 7^{2n+2} + 2^3 n = 41s$.

Zadanie B.9. Udowodnij indukcyjnie, że dla wszystkich $n \geqslant 1$

$$7 \mid 2^{3n-1} + 3 \quad (\text{tzn. } \exists_k 2^{3n-1} + 3 = 7k).$$

Zadanie B.10. Udowodnij indukcyjnie nierówność Bernoulliego: dla wszystkich $n \geqslant 1$ i dowolnej liczby rzeczywistej $x > -1$

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Zadanie B.11. Udowodnij, że $2^n > n^2$ dla $n \geqslant 5$.

Zadanie B.12. Znaleźć kresy zbiorów:
a) $A = \{x \in \mathbb{R} : |2x+3| + |x+3| - x < 6\}$,
b) $B = \{x \in \mathbb{R} : |x^3 - 1| < x^2 + x + 1\}$,
c) $C = \{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$,
d) $D = \{\frac{1}{k} + \frac{1}{l} : k, l \in \mathbb{N}\}$,
e) $E = \{k + \frac{1}{n} : k \in \{0,1,2\} \wedge n \in \mathbb{N}\}$,
f) $F = \{2 \cdot (-1)^{n+1} + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(2 + \frac{3}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$.

Zadanie B.13. Korzystając z definicji uzasadnić, że podane funkcje są monotoniczne na wskazanych zbiorach:
a) $f(x) = x^3$, $\mathbb{R}$,
b) $g(x) = \frac{1}{x}$, $(0, \infty)$,
c) $h(x) = x^4 + x^2 + 1$, $(-\infty, 0]$.

Zadanie B.14. Określ funkcje złożone: $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$, jeżeli:
a) $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$,
b) $f(x) = 2 + \cos(x)$, $g(x) = \sqrt{x}$.

Zadanie B.15. Znaleźć funkcje odwrotne do podanych:
a) $f(x) = 2 - \log_5 x$,
b) $g(x) = \frac{1}{2^x + 4}$,
c) $h(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 27$.