

§ 4. Funkcje trygonometryczne

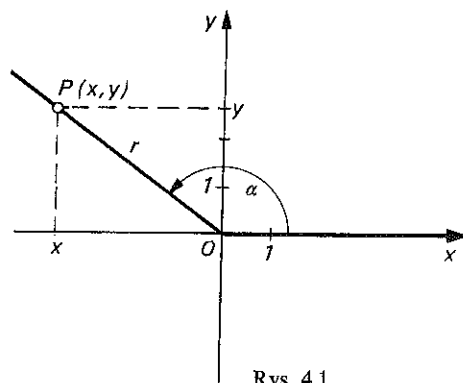
Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

Niech α oznacza dowolny kąt. Obieramy układ współrzędnych tak, aby jego początkiem był wierzchołek kąta α i aby jedno z jego ramion zawierało się w dodatniej półosi x (rys. 4.1). Na drugim ramieniu obieramy dowolny punkt $P = (x, y)$ różny od początku układu współrzędnych i określamy funkcje trygonometryczne kąta α w sposób następujący:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \quad (x \neq 0)$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}, \quad (y \neq 0)$$

$$\text{gdzie } r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Rys. 4.1

Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej

Niech x będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Wówczas istnieje liczba całkowita k i liczba rzeczywista r takie, że $x = 2k\pi + r$ i $0 \leq r < 2\pi$. Istnieje również kąt α , którego miarą łukową jest r . Wówczas przyjmujemy:

$$\sin x = \sin \alpha,$$

$$\cos x = \cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} \alpha.$$

- 4.9. W rombie dane są: bok długości 10 cm i kąt 40° . Oblicz długości przekątnych i pole rombu.
- 4.10. W trójkącie równoramiennym dane są: długość podstawy 10 cm i kąt przy podstawie równy 30° . Oblicz długość promienia koła wpisanego w trójkąt i promienia koła opisanego na trójkącie.
- 4.11. W trójkącie równoramiennym dana jest długość promienia koła opisanego na trójkącie równa 10 cm i kąt przy wierzchołku równy 50° . Oblicz obwód trójkąta.
- 4.12. W trójkącie równoramiennym dana jest długość promienia koła wpisanego w trójkąt równa 10 cm i kąt przy wierzchołku równy 50° . Oblicz obwód trójkąta.
- 4.13. W trójkącie prostokątnym ABC kąt przy wierzchołku C jest prosty. Wiedząc, że $\sin \alpha = m$, oblicz $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\sin \beta$, $\cos \beta$, $\operatorname{ctg} \beta$ (α oznacza kąt przy wierzchołku A , β kąt przy wierzchołku B).
- 4.14. Z wierzchołka kąta α jako ze środka zakreślono okrąg o promieniu długości r . Oblicz długość łuku AB , na którym opiera się kąt α , mając daną miarę kąta α w radianach i długość promienia r .
- a) $\alpha = 2$; $r = 2$,
 b) $\alpha = 1,5$; $r = 5$,
 c) $\alpha = \frac{1}{3}$; $r = 6$.
- 4.15. Dla jakich $\alpha (0^\circ < \alpha < 360^\circ)$ prawdziwe są następujące nierówności:
- a) $\sin \alpha \cos \alpha > 0$,
 b) $\sin \alpha \cos \alpha < 0$,
 c) $\sin \alpha \cos \alpha = 0$,
 d) $\operatorname{tg} \alpha > 1$,
 e) $\operatorname{ctg} \alpha < \sqrt{3}$,
 f) $\sin \alpha > \cos \alpha$,
 g) $\cos \alpha < \frac{1}{2}$,
 h) $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{ctg} \alpha$?
- 4.16. Określ (bez użycia tablic) znak różnicy:
- a) $\sin 72^\circ - \sin 80^\circ$,
 b) $\cos 15^\circ - \cos 16^\circ$,
 c) $\cos 300^\circ - \cos 340^\circ$,
 d) $\operatorname{tg} 35^\circ - \sin 35^\circ$,
 e) $\sin 200^\circ - \sin 100^\circ$,
 f) $\cos 200^\circ - \cos 20^\circ$,
 g) $\sin 100^\circ - \sin 10^\circ$,
 h) $\sin 400^\circ - \sin 40^\circ$.
- 4.17. Jaką liczbą (dodatnią, czy ujemną) jest:
- a) $\sin 1$,
 b) $\sin 2$,
 c) $\sin 10$,
 d) $\cos 2$,
 e) $\cos 15$,
 f) $\cos(-8)$,
 g) $\operatorname{tg} 1,5$,
 h) $\operatorname{tg}(-0,75)$,
 i) $\operatorname{tg} 10$,
 j) $\operatorname{ctg} 5$,
 k) $\operatorname{ctg} 1,5$,
 l) $\operatorname{ctg} 2,5$?

4.18. Zbadaj, która z liczb w każdej z podanych par jest większa:

- a) $\sin 1$, $\operatorname{tg} 1$, c) $\sin 2$, $\cos 2$, e) $\operatorname{ctg} \frac{3}{4}\pi$, $\operatorname{tg} \frac{3}{4}\pi$,
 b) $\cos 1$, $\operatorname{ctg} 1$, d) $\sin \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$, f) $\sin 5\pi$, $\cos 3\pi$.

4.19. Jaką liczbą (dodatnią czy ujemną) jest:

- a) $\sin(\cos 1)$, d) $\operatorname{tg}(\sin 2,5)$,
 b) $\cos(\sin 1)$, e) $\operatorname{tg}\left(\cos \frac{3}{4}\pi\right)$,
 c) $\operatorname{ctg}(\cos 0,3)$ f) $\cos\left(\operatorname{tg} \frac{3}{4}\pi\right)$?

4.20. Zbuduj kąt ostry α wiedząc, że:

- a) $\operatorname{tg} \alpha = 3$, d) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, g) $\cos \alpha = \frac{2}{7}$,
 b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, e) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, h) $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$,
 c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, f) $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, i) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

4.21. Zbuduj kąt α wiedząc, że:

- a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$,
 b) $\sin \alpha = -\frac{1}{4}$ i $270^\circ < \alpha < 360^\circ$,
 c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\cos \alpha < 0$,
 d) $\sin \alpha = -1$.

4.22. Zbuduj kąt β wiedząc, że:

- a) $\cos \beta = -\frac{2}{3}$ i $90^\circ < \beta < 180^\circ$,
 b) $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ i $270^\circ < \beta < 360^\circ$,
 c) $\cos \beta = \frac{2}{3}$ i $\sin \beta > 0$,
 d) $\cos \beta = -\frac{1}{3}$ i $\operatorname{tg} \beta < 0$,
 e) $\cos \beta = -\frac{2}{5}$ i $\operatorname{tg} \beta > 0$.

4.23. Zbuduj kąt γ wiedząc, że:

- a) $\operatorname{tg} \gamma = -1$ i $\sin \gamma < 0$,
- b) $\operatorname{ctg} \gamma = -1$ i $\sin \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
- c) $\operatorname{ctg} \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\gamma > 90^\circ$,
- d) $\operatorname{tg} \gamma = \sqrt{3}$ i $\gamma < 90^\circ$.

4.24. Zbuduj kąt α , gdy $0^\circ < \alpha < 360^\circ$, wiedząc, że:

- a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, c) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{5}$,
- b) $\cos \alpha = -0,8$, d) $\operatorname{tg} \alpha = 1\frac{1}{2}$.

4.25. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α , jeżeli:

- a) $\sin \alpha = \frac{15}{17}$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$,
- b) $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ i $270^\circ < \alpha < 360^\circ$,
- c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24}$ i $180^\circ < \alpha < 270^\circ$,
- d) $\sin \alpha = -\sqrt{0,2}$ i $180^\circ < \alpha < 270^\circ$,
- e) $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{n}}{n+1}$ i $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

4.26. Oblicz bez użycia tablic wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α , mając dane:

- a) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, d) $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, g) $\cos \alpha = \sqrt{0,3}$,
- b) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, e) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$, h) $\operatorname{tg} \alpha = -1$,
- c) $\sin \alpha = -1$, f) $\operatorname{ctg} \alpha = -\sqrt{3}$, i) $\operatorname{ctg} \alpha = 0$.

Uwzględnij dwie odpowiedzi.

4.27. Oblicz $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$, gdy $\operatorname{ctg} \alpha = m$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

4.28. Oblicz $x = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta$, gdy $\operatorname{tg} \alpha = -1$ i $\operatorname{tg} \beta = -\sqrt{3}$.
Uwzględnij dwie różne odpowiedzi.

4.29. Oblicz bez użycia tablic:

- a) $\sin^2 62^\circ + \sin^2 28^\circ$, b) $\operatorname{tg} 44^\circ \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 46^\circ$,
- c) $(\sin 35^\circ + \cos 35^\circ) \cdot (\sin 35^\circ - \cos 35^\circ) + 2 \sin^2 55^\circ$

4.30. Jaka jest najmniejsza, a jaka największa wartość wyrażen:

- a) $1 - \sin x$, d) $2 + \cos 2x$,
 b) $2 + \cos x$, e) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin x$,
 c) $3 - 2 \cos x$, f) $\sqrt{|\sin x|}$?

4.31. Sprawdź następujące tożsamości:

- a) $(\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x) \cdot \operatorname{ctg}^2 x = \sin^2 x$,
 b) $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$,
 c) $(1 + \cos x)(1 - \cos x) = \sin^2 x$,
 d) $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$,
 e) $\frac{1}{\cos x} - \cos x = \sin x \cdot \operatorname{tg} x$,

f) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$,

Dla jakich x równości te nie zachodzą?

4.32. Sprawdź następujące tożsamości:

- a) $1 + \operatorname{ctg} x = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x}$,
 b) $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$,
 c) $(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$,
 d) $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = (\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{ctg} x + 1)$,
 e) $\operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1}{\sin x}$,
 f) $(1 + \sin x) \left(\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x \right) = \cos x$,

4.33. Sprawdź następujące tożsamości:

- a) $\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin x}$,
 b) $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y} = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$,
 c) $\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \right) (\sin x + \cos x) = 2 + \frac{1}{\sin x \cos x}$,
 d) $\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} \right) (\sin x + \cos x) = \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x$,
 e) $1 - 2 \sin^2 x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

4.34. Wykaż, że jeśli $x = a \cos u$ i $y = b \sin u$, to $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$.

$$\frac{x^2 + y^2}{z^2} = \operatorname{tg}^2 u \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

a) $\sin x \cos x$, c) $(\sin x - \cos x)^2$,
b) $\sin^3 x + \cos^3 x$, d) $\sin^4 x + \cos^4 x$.

$$\text{a) } A = \left\{ x : \sin x \geq \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad 0 < x < 2\pi \right\},$$
$$\text{b) } B = \left\{ x : \operatorname{tg} x > \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{и} \quad 0 < x < \frac{1}{2}\pi \right\},$$
$$\text{c) } C = \left\{ x: \operatorname{tg} x > \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}\pi < x < \frac{3}{2}\pi \right\},$$

d) $D = \left\{ x : \sin x \geq \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \cos x < 0 \quad \text{и} \quad 0 < x < 2\pi \right\},$

$$\text{e) } E = \left\{ x : \cos x \leq -\frac{1}{2} \quad \text{ i } \quad \sin x > 0 \quad \text{ i } \quad 0 < x < 2\pi \right\}$$

a) $\cos 22^\circ 30'$, jeśli $\sin 22^\circ 30' = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$,

b) $\sin 15^\circ$ ješli $\cos 15^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$,

a) $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$ i $\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$ i $\alpha \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$ i $\beta \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$,

b) $\sin(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{2}}{2} i$ $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} i$ $\alpha \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$ $\beta \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$.

a) $y = \sin 2x$, c) $y = \sin 3x$, e) $y = \cos \frac{1}{2}x$,

b) $y = \sin \frac{1}{3}x$, d) $y = \operatorname{tg} 2x$, f) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{9}\right)$.

4.42. Wyznacz okres zasadniczy funkcji:

a) $y = \operatorname{tg} \frac{1}{3}x$, d) $y = \cos(4\pi x + 2)$, g) $y = |\sin x|$,

b) $y = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$, e) $y = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{3}$, h) $y = \cos^2 x$,

c) $y = \sin \frac{4}{3}x$, f) $y = \operatorname{tg} \frac{2\pi x}{5}$.

4.43. Oblicz bez użycia tablic matematycznych:

a) $\sin 1200^\circ + \cos(-1080^\circ)$,

b) $4\sin 120^\circ \operatorname{tg} 300^\circ$,

c) $2\sin 120^\circ - \operatorname{tg} 240^\circ$,

d) $3\cos(-300^\circ)\sin 45^\circ \operatorname{tg} 135^\circ$,

e) $2\sin^2 225^\circ - \operatorname{ctg} 330^\circ \operatorname{tg} 405^\circ$,

f) $10\operatorname{ctg} 315^\circ \sin(-150^\circ)\cos 225^\circ$.

4.44. Podane wartości funkcji trygonometrycznych zastąp równymi im wartościami funkcji trygonometrycznych kątów nie większych od 45° :

a) $\sin 105^\circ 45'$, e) $\sin 320^\circ$, i) $\sin 248^\circ$,

b) $\cos 215^\circ 36'$, f) $\cos 99^\circ$, j) $\cos 1305^\circ$,

c) $\operatorname{tg} 136^\circ 12'$, g) $\operatorname{ctg} 125^\circ$, k) $\operatorname{tg} 1250^\circ$,

d) $\operatorname{ctg} 230^\circ 48'$, h) $\operatorname{ctg} 100^\circ$, l) $\operatorname{ctg} 3000^\circ$.

4.45. Mając dane $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{2}$, oblicz:

a) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$, b) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$, c) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right)$, d) $\operatorname{ctg}(\pi - \alpha)$.

4.46. Mając dane $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$ (gdy $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$), oblicz:

a) $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$, c) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$,

b) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$, d) $\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha)$.

4.47. Wyznacz α , jeśli:

a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $0^\circ < \alpha < 720^\circ$,

b) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $0^\circ < \alpha < 720^\circ$,

c) $\sin \alpha = -1$ i $360^\circ < \alpha < 720^\circ$,

d) $\cos \alpha = 0$ i $0^\circ < \alpha < 540^\circ$.

- 4.48. Oblicz bez użycia tablic wartość wyrażen:
- $\frac{\sin^2 120^\circ \cdot \cos(-180^\circ)}{\operatorname{tg}(-135^\circ) \cdot \operatorname{ctg} 405^\circ},$
 - $\frac{9 \sin 150^\circ - 4 \cos 240^\circ + 12 \sin 600^\circ}{3 \sin(-45^\circ) - 2 \cos(-420^\circ)},$
 - $\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 70^\circ \operatorname{tg} 80^\circ.$
- 4.49. Przedstaw w najprostszej postaci wyrażenia:
- $\frac{\sin(\alpha - 180^\circ) \cos(450^\circ - \alpha)}{\sin(540^\circ + \alpha) \cos(-270^\circ + \alpha)},$
 - $\frac{\cos(180^\circ - \alpha) \sin(-\alpha) \operatorname{ctg}(-\alpha - 90^\circ)}{\operatorname{tg}(540^\circ + \alpha) \sin(\alpha - 180^\circ) \operatorname{tg}(-\alpha)}.$
- 4.50. Wykaż prawdziwość następujących równości (α, β, γ oznaczają kąty trójkąta):
- $\sin \frac{\gamma}{2} = \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$
 - $\cos \frac{\gamma}{2} = \sin \frac{\alpha + \beta}{2},$
 - $\sin \gamma = \sin(\alpha + \beta).$
- 4.51. Wiedząc, że $\alpha + \beta = \pi$ i $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, oblicz $\sin \beta$, $\operatorname{tg} \beta$ i $\operatorname{tg} \alpha$.
- 4.52. Zbadaj czy istnieją takie kąty α i β , aby:
- $2 - \sin \alpha = 1,5$
 - $1 + \cos \beta = 3,$
 - $\sin \alpha \cos \beta = 1\frac{1}{3},$
 - $\sin \alpha + \sin \beta = -2,$
 - $\sin \alpha + \cos \beta = 0,$
 - $\sin \alpha + \cos \alpha = 1,$
 - $\operatorname{tg} \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2},$
 - $\operatorname{ctg} \alpha \sin \alpha = -1,2.$
- 4.53. Na jednym rysunku naszkicuj wykresy funkcji ($-\pi < x < \pi$):
- $y = \sin x$ i $y = |\sin x|,$
 - $y = \cos x$ i $y = |\cos x|,$
 - $y = \operatorname{tg} x$ i $y = |\operatorname{tg} x|.$
- 4.54. Na podstawie wykresów z zadania 4.53. odczytaj dla każdej funkcji:
- W jakich przedziałach funkcja rośnie, a w jakich maleje?
 - Która z tych funkcji jest parzysta?
 - Jaki jest okres główny każdej z funkcji?
- 4.55. Zbadaj, które z określonych niżej funkcji są parzystymi, a które nieparzystymi:

- 4.63. Sporządź wykres
- a) $y = \sin x$
 b) $y = \cos x$
 c) $y = \sin 2x$
 d) $y = \cos 2x$
- 4.56. Dla jakich x jest:
 a) $\sin x > 0$
 b) $\cos x > 0$
 c) $\sin x > \cos x$
 d) $\sin x > 0$
- 4.57. Uzyskaj wykresy funkcji:
 a) $y = \sin x$
 b) $y = \cos x$
 c) $y = \sin 2x$
 d) $y = \cos 2x$
- 4.58. V
- 4.64. Rozwiąż graficznie:
 a) $\sin 2x > 0$
 b) $\cos 2x < 0$
 c) $\sin 2x > 0$
 d) $\sin x > 0$
- 4.65. Wyznacz kąty x ($0^\circ < x < 360^\circ$):
 a) $\sin 2x > 0$
 b) $\cos 2x < 0$
 c) $\sin 2x > 0$
 d) $\sin x > 0$
- 4.66. Rozwiąż graficznie równania:
 a) $\sin 2x = \sin x$
 b) $\cos x = \sin x$
 c) $\tan x = \cos 2x$
 d) $\sin 2x = \cos x$
- 4.67. Sporządzając wykresy rozwiąż równania:
 a) $\sin x = \frac{4}{5}x$
 b) $\sin x > \cos x$
 c) $\sin x > \sin(\pi - x)$
 d) $\sin x + \cos x < 0$
- 4.68. Rozwiąż graficznie nierówności:
 a) $\sin x > \cos x$
 b) $\sin x > \sin(\pi - x)$
 c) $\cos x > \tan x$
 d) $\sin x + \cos x < 0$
- 4.69. Jeden z boków prostokąta jest równy 4, przekątna prostokąta i druga przekątna dzielą prostokąt na trzy trójkąty. Wyznacz pole prostokąta.
- 4.70. Zbadaj, czy funkcja okresowa:
 a) $f(x) = \sin x$
 b) $f(x) = \cos x$
 c) $f(x) = \sin 2x$
 d) $f(x) = \cos 2x$

- a) $y = \sin 2x$, e) $y = x \cos x$, i) $y = \frac{\sin x}{x}$,
 b) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, f) $y = x^2 \operatorname{tg} x$, j) $y = \frac{\sin x}{1 + \sin^2 x}$,
 c) $y = \sin^2 x$, g) $y = \sin x \cos x$, k) $y = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$,
 d) $y = x \cdot \sin x$, h) $y = |\sin x|$, l) $y = \frac{1}{2 + \cos x}$.

4.56. Dla jakich wartości parametrów a, b funkcja $y = a \sin x + b \cos x$ jest:

- a) parzysta, b) nieparzysta?

4.57. Uzasadnij, że funkcja określona wzorem

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

jest funkcją okresową i nie jest funkcją parzystą ani nieparzystą.

4.58. Wymień wszystkie elementy zbiorów:

- a) $A = \left\{x : |\sin x| = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad 0 < x < 2\pi\right\}$,
 b) $B = \{x : |\cos x| = 1 \quad \text{i} \quad 0 \leq x \leq 2\pi\}$,
 c) $C = \{x : |\operatorname{tg} x| = \sqrt{3}, \quad \text{i} \quad 0 < x < 2\pi\}$,
 d) $D = \{x : |\operatorname{ctg} x| = 1, \quad \text{i} \quad 0 < x < 2\pi\}$.

Skorzystaj z odpowiednich wzorów.

4.59. Przekształcając odpowiednio wykres funkcji $y = \sin x$, naszkicuj w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$ wykresy funkcji:

- a) $y = 1 - \sin x$, c) $y = -1 + \sin x$,
 b) $y = 1 + \sin x$, d) $y = 1 + \cos x$.

4.60. Sporządź wykresy funkcji:

- a) $y = \sin 2x$, c) $y = \sin 3x$,
 b) $y = \sin \frac{1}{2}x$, d) $y = \sin(-2x)$.

4.61. Sporządź wykresy funkcji:

- a) $y = 2 \sin x$, c) $y = 3 \sin x$,
 b) $y = \frac{1}{2} \sin x$, d) $y = -2 \sin x$.

4.62. Sporządź wykresy funkcji:

- a) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, c) $y = \sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$,
 b) $y = \sin\left(x - \frac{2}{3}\pi\right)$, d) $y = \sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)$.

4.63. Sporządź wykresy funkcji:

a) $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$,

c) $y = -\operatorname{tg}\frac{1}{2}x + 2$,

b) $y = -\sin 3x$,

d) $y = \sin x + \sin(\pi - x)$,

4.64. Rozwiąż graficznie nierówności ($0 < x < 2\pi$):

a) $\sin 2x > 0$,

d) $\operatorname{tg} x > 3$,

g) $\operatorname{ctg} x < \frac{3}{2}$,

b) $\cos 2x < 1$,

e) $\sin x < \frac{1}{4}$,

h) $\frac{1}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$,

c) $\operatorname{tg} 2x > 1$,

f) $\cos x < \frac{2}{3}$,

i) $\frac{1}{4} < \cos x < \frac{1}{3}$.

4.65. Wyznacz kąty x ($0^\circ < x < 360^\circ$) spełniające warunki:

a) $\sin 2x > 0$ i $0^\circ < x < 180^\circ$, e) $\cos 2x > 0$ i $\cos x < 0$,

b) $\cos 2x < 0$ i $0^\circ < x < 90^\circ$, f) $\cos 2x > 0$ i $\cos x > 0$,

c) $\sin 2x > 0$ i $\cos 2x < 0$, g) $\sin 2x > 0$ i $\sin x < 0$.

d) $\sin x > 0$ i $\sin 2x < 0$,

4.66. Rozwiąż graficznie równania:

a) $\sin 2x = \sin x$,

b) $\cos x = \sin x$,

c) $\operatorname{tg} x = \cos 2x$,

d) $\sin 2x = \cos x$. Uwzględnij kąty $0^\circ < x < 360^\circ$

4.67. Sporządzając wykresy odpowiednich funkcji znajdź przybliżone rozwiązanie równań:

a) $\sin x = \frac{4}{5}x$,

b) $x + \cos x = 1$,

4.68. Rozwiąż graficznie nierówności:

a) $\sin x > \cos x$, gdy $0 \leq x \leq 2\pi$;

b) $\sin x > \sin(\pi - x)$, gdy $0 \leq x \leq \pi$;

c) $\cos x > \operatorname{tg} x$, gdy $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$;

d) $\sin x + \cos x < 0$ gdy $0 \leq x \leq 2\pi$.

4.69. Jeden z boków prostokąta ma długość 2 cm, kąt zaś między przekątną prostokąta i danym bokiem jest α .

a) Wyznacz pole prostokąta, jako funkcję argumentu α .

b) Naszkicuj wykres tej funkcji.

4.70. Zbadaj, czy funkcja określana wzorem $f(x) = |\sin x| + |\cos x|$ jest funkcją:

a) okresową,

c) nieparzystą,

b) parzystą,

d) rosnącą w całej dziedzinie.

§ 5. Funkcja liniowa

Funkcją liniową nazywamy funkcję $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem $f(x) = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.

Wykresem funkcji liniowej jest prosta nachylona do osi x pod takim kątem α , że $\operatorname{tg} \alpha = a$ i przecinająca oś y w punkcie $B = (0, b)$. Liczba a nazywa się współczynnikiem kierunkowym (kątowym) wykresu funkcji liniowej.

Jeżeli do wykresu funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ należą punkty $P = (x_1, y_1)$ i $Q = (x_2, y_2)$ gdzie $x_2 \neq x_1$, to współczynnik kierunkowy wykresu wyraża się wzorem:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Równaniem liniowym nazywamy równanie postaci $ax + b = 0$, gdzie a, b , są ustalonymi liczbami rzeczywistymi.

Zbiorem rozwiązań równania liniowego $ax + b = 0$ jest:

- a) **zbiór jednoelementowy** $\left\{ -\frac{b}{a} \right\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \neq 0$.
- b) **zbiór wszystkich liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$** wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ i $b = 0$.
- c) **zbiór pusty** wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ i $b \neq 0$.

Nierównością liniową nazywamy każdą z nierówności postaci $ax + b < 0$; $ax + b > 0$; $ax + b \leq 0$; $ax + b \geq 0$, gdzie, a, b , są ustalonymi liczbami rzeczywistymi.

Zadania

5.1. Do wykresu funkcji liniowej należy początek układu współrzędnych oraz punkt M . Podaj wzór określający funkcję, gdy:

a) $M = (1, 1)$,

d) $M = (k, 2k)$, $k \neq 0$

b) $M = (3, 2)$,

e) $M = \left(k, -\frac{1}{2}k\right)$ ($k \in \mathbb{R}$ i $k \neq 0$)

c) $M = (-1, 5)$,

5.2. W każdej z podanych niżej częściowych tabel wartości funkcji liniowej dwie wartości funkcji są błędnie dobrane. Znajdź je i popraw.

a)

x	1	2	3	4	5
y	3	-2	5	2	7

, c)

x	-2	-1	0	1	2
y	6	4	5	0	1

.

b)

x	-2	-1	0	1	2
y	-3	-2	-1	3	4

,

5.3. Do wykresu funkcji $y = ax + b$ należą punkty A i B . Sprawdź rachunkowo, czy punkt C również należy do wykresu, jeśli:

a) $A = (1, 2)$,

$B = (-1, 4)$,

$C = (2, 6)$,

b) $A = (2, 1)$,

$B = (4, 0)$,

$C = \left(3, \frac{1}{2}\right)$,

c) $A = \left(\frac{1}{3}, 3\right)$,

$B = \left(-\frac{3}{4}, 3\right)$,

$C = (1, 3)$.

5.4. Naszkicuj wykres funkcji $y = 2x$. Następnie przesun go o wektor równoległy do jednej z osi tak, aby przechodził przez podany punkt M . Napisz wzór funkcji, której wykresem jest otrzymana prosta.

a) $M = (0, 3)$,

b) $M = (0, -2)$,

c) $M = (-5, 0)$,

d) $M = (4, 0)$.

5.5. Naszkicuj wykres funkcji $y = \frac{1}{2}x$. Przekształć go przez symetrię względem:

a) osi x ,

c) prostej $y = 2$,

b) osi y ,

d) początku układu.

Napisz wzór funkcji, której wykresem jest otrzymana prosta.

5.6. Rozwiąż zadanie 5.4. dla funkcji $y = x - 4$.

5.7. Rozwiąż zadanie 5.5. dla funkcji $y = 3 - x$.

5.8. Naszkicuj wykres danej funkcji i przekształć go przez symetrię

względem prostej $x = 1$. Napisz wzór funkcji, której wykresem jest otrzymana prosta.

- a) $y = -2x + 1$, c) $y = 2x - 3$,
b) $y = -\frac{1}{2}x + 4$, d) $y = 2$.

5.9. Napisz wzór funkcji liniowej, której wykres:

- a) jest równoległy do wykresu $y = 2x + 1$ i przechodzi przez punkt $A = (1, 5)$;
b) jest równoległy do wykresu $y = -x + 3$ i przechodzi przez punkt $B = (0, 5)$;
c) jest równoległy do wykresu funkcji $y = -\frac{1}{2}x + 4$ i przechodzi przez punkt $C = (4, 0)$.

5.10. Wykres funkcji liniowej przechodzi przez dany punkt A i jest nachylony do osi x pod danym kątem α . Napisz wzór tej funkcji, jeżeli:

- a) $A = (1, 5)$, $\alpha = 120^\circ$;
b) $A = (-1, -1)$, $\alpha = 60^\circ$;
c) $A = (-2, 4)$, $\alpha = 0^\circ$.

5.11. Napisz wzór funkcji danej wzorem $y = ax + b$, która odwzorowuje zbiór X na zbiór Y , jeśli:

- a) X — zbiór liczb parzystych, Y — zbiór liczb nieparzystych;
b) X — zbiór liczb całkowitych ujemnych,
 Y — zbiór liczb całkowitych dodatnich;
c) X — zbiór wszystkich wielokrotności liczby 3,
 Y — zbiór wszystkich wielokrotności liczby 4.

5.12. Wykresy wszystkich funkcji postaci:

$$y = mx, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R} \text{ i } m \in \mathbf{R}$$

tworzą rodzinę prostych. Naszkicuj kilka z tych wykresów. Zaciemnij część płaszczyzny, w której zawierają się wykresy, gdy:

- a) $0 < m < 1$, c) $-1 < m < 0$, e) $m > 2$,
b) $m > 1$, d) $m < -1$, f) $-3 < m < -\frac{1}{2}$.

5.13. Rozwiąż zadanie 5.12. dla funkcji postaci $y = mx + 2$.

5.14. Rozwiąż zadanie 5.12. dla funkcji postaci $y = 2x + m$ i m spełniającego warunki:

- a) $1 < m < 3$, c) $m < -3$,
b) $-1 < m < 0$, d) $-1 \leq m \leq 2$.

5.15. Wyznacz punkty przecięcia się wykresów podanych funkcji z osiami układu współrzędnych:

a) $y = -2x + 6$, b) $y = x + 5$, c) $y = -\frac{1}{3}x + 10$, d) $y = 3$.

5.16. Wykaż, że do wykresu funkcji $y = \sqrt{3x} + \frac{1}{2}$ nie należy żaden punkt, którego obie współrzędne są liczbami całkowitymi.

5.17. Wykaż, że do wykresu funkcji $y = -\sqrt{2x} + \sqrt{3}$ nie należy żaden punkt, którego obie współrzędne są liczbami wymiernymi.

5.18. Wykaż, że jeśli $a \neq 0$, to funkcja liniowa $y = ax + b$ odwzorowuje wzajemnie jednoznacznie zbiór $\mathbb{R}$ na siebie.

5.19. Naszkicuj wykresy funkcji:

a) $y = |x|$, e) $y = |-x|$,
 b) $y = |x| + 1$, f) $y = 2|x|$,
 c) $y = |x - 1| + 1$, g) $y = 2|x| - |x + 1|$,
 d) $y = |x| + |x - 1|$, h) $y = x - |x|$.

5.20. Naszkicuj wykres funkcji $y = \frac{|x|}{x}$.

5.21. Oblicz współczynniki a, b dla funkcji $f(x) = ax + b$, mając dane:

a) $f(4) = 3$ i $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$,

b) $f(2) = -1$ i $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 4)$,

c) $f(3) = 2$ i $f(x) > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

5.22. Uzupełnij podaną tabelkę:

Znaki liczb a, b	Numery ćwiartek, przez które przechodzi wykres funkcji $y = ax + b$
$a > 0$ i $b > 0$	
$a > 0$ i $b < 0$	
$a > 0$ i $b = 0$	
$a < 0$ i $b > 0$	I, II, IV
$a < 0$ i $b < 0$	
$a < 0$ i $b = 0$	
$a = 0$ i $b < 0$	
$a = 0$ i $b > 0$	

5.23. Napisz wzór określający funkcję $g(x)$ odwrotną do funkcji $f(x)$.

- a) $f(x) = x$, d) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$,
b) $f(x) = 2x$, e) $f(x) = -\frac{3}{4}x + 2$,
c) $f(x) = -x + 1$, f) $f(x) = \frac{1}{2} - 4x$.

Co powiesz o wykresach funkcji $y = f(x)$ i $y = g(x)$?

5.24. Czy do każdej funkcji liniowej istnieje funkcja odwrotna?
Odpowiedź sformułuj w postaci twierdzenia i udowodnij je.

5.25. Naszkicuj wykresy funkcji:

- a) $y = x + \sqrt{x^2}$, c) $y = \sqrt{x^2 + 6x + 9} + 3$,
b) $y = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$, d) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2}$.

Wskazówka: $\sqrt{x^2} = |x|$.

5.26. Dla jakich wartości m prosta $y = mx - 3$ jest:

- a) równoległa b) prostopadła do prostej $3x + 4y = 0$?

5.27. Napisz równanie prostej k ,

- 1) równoległej,
2) prostopadłej do prostej o równaniu $2x + 3y = 5$
wiedząc, że do prostej k należy punkt A , gdy:

- a) $A = (2, 1)$, d) $A = (0, 0)$,
b) $A = (1, 2)$, e) $A = (-2, 3)$,
c) $A = (-1, 1)$, f) $A = (-1, 0)$.

5.28. Podane równanie ogólne prostej przekształć do postaci kierunkowej i znajdź przybliżoną miarę kąta nachylenia prostej do osi x .

- a) $x + 3y - 5 = 0$, c) $2x - 3y + 4 = 0$,
b) $5x + y - 2 = 0$, d) $x + 2y - 1 = 0$.

5.29. Napisz równanie prostej, która przechodzi przez początek układu współrzędnych i jest nachylona do osi x pod kątem α , gdy:

- a) $\alpha = \frac{1}{3}\pi$, b) $\alpha = \frac{1}{4}\pi$, c) $\alpha = \frac{3}{4}\pi$, d) $\alpha = \frac{1}{6}\pi$.

5.30. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $A = (-1, 2)$ i równoległej do:

- a) osi x , b) osi y .

Która z tych prostych jest wykresem funkcji?

- 5.31. Napisz równanie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych:
- równoległej do prostej $y = -2x + 3$,
 - prostopadłej do prostej $y = \frac{1}{2}x - 5$,
 - tworzącej z prostą $y = 2$ kąt o mierze $\frac{\pi}{4}$,
 - tworzącej z prostą $x = 2$ kąt o mierze $\frac{\pi}{6}$.
- 5.32. Napisz równanie prostej, która jest nachylona do osi x pod kątem α i przecina oś y w punkcie $A = (0, b)$, gdy:
- $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $b = 2$,
 - $\alpha = \frac{3}{4}\pi$, $b = 3$,
 - $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $b = \sqrt{3}$,
 - $\alpha = \frac{5}{6}\pi$, $b = -1$.
- 5.33. Sprawdź, które z następujących trójek punktów należą do jednej prostej:
- $A = (0, 5)$; $B = (4, 1)$; $C = (-2, 7)$;
 - $A = (2, 0)$; $B = (-4, -3)$; $C = \left(3, \frac{1}{3}\right)$;
 - $A = (0, 7)$; $B = (-1, 5)$; $C = (3, 4)$.
- 5.34. Mając dane punkty $A = (1, 2)$ i $B = (5, 2)$ znajdź taki punkt C , aby prosta AC była nachylona do osi x pod kątem 45° , zaś prosta BC pod kątem 135° . Jaki kąt tworzą ze sobą proste AC i BC ?
- 5.35. Dla jakich wartości parametru a , prosta przechodząca przez punkty $A = (1, -4)$ i $B = (a, 2a)$ jest nachylona do osi x pod kątem 45° ?
- 5.36. Dla jakich wartości parametru a , kąt α nachylenia prostej, przechodzącej przez punkty $A = (0, 0)$ i $B = (1, 2a)$, do osi x spełnia warunek:
- $0^\circ < \alpha < 45^\circ$
 - $135^\circ < \alpha < 180^\circ$.
- 5.37. Dla jakich wartości parametru a , współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty $A = (-5, 0)$ i $B = (0, a)$ należy do przedziału $\langle -1, 1 \rangle$?
- 5.38. Punkty $A = (1, 0)$; $B = (0, 1)$; $C = (-1, 0)$; $D = (0, -1)$ są wierzchołkami kwadratu. Napisz równania prostych zawierających boki i przekątne kwadratu $ABCD$.

- 5.39. Dla jakich wartości parametru m funkcja $y = (2m - 3)x + 1$ jest:
a) rosnąca, b) malejąca, c) stała?
- 5.40. Dla jakich wartości parametru m wykres funkcji $y = mx + 2$ przechodzi przez:
a) I, II, i III ćwiartkę układu współrzędnych,
b) I, II i IV „ „ „ „
c) I, II „ „ „ „ ?
- 5.41. Dla jakich wartości parametru n , wykres funkcji $y = 2x + n$ przechodzi przez:
a) I, III, IV ćwiartkę układu współrzędnych,
b) początek układu,
c) I, II, III ćwiartkę układu współrzędnych,
d) punkt $A = (3, 5)$?
- 5.42. Wyznacz te wartości parametru m , dla których wykres funkcji $y = mx + 3$ ma co najmniej jeden punkt wspólny z brzegiem prostokąta $ABCD$, którego wierzchołki mają współrzędne $A = (1, 1)$, $B = (5, 1)$, $C = (5, 5)$, $D = (1, 5)$.
- 5.43. Wyznacz te wartości parametru m , dla których wykres funkcji $y = mx + 3$ przecina oś rzędnych w takim punkcie A , a oś odciętych w takim punkcie B , że $|BO| = 3|OA|$, (O oznacza początek układu współrzędnych).
- 5.44. Wyznacz te wartości parametru n , dla których miejscem zerowym funkcji $y = -3x + n$ jest liczba większa od 2.
- 5.45. Wyznacz, dla jakich x wartości funkcji $y = 2x - 5$ są:
a) dodatnie, c) większe od 1,
b) ujemne, d) mniejsze od 3.
- 5.46. Naskicuj wykresy funkcji:
- a) $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{dla } x < -4 \\ x & \text{dla } -4 \leq x \leq 4 \\ -5 & \text{dla } x > 4, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R},$
- b) $g(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{5} & \text{dla } x < 2 \\ 2x-3 & \text{dla } x \geq 2, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R},$
- c) $h(x) = \begin{cases} \frac{x+16}{3} & \text{dla } x < -1 \\ 2-3x & \text{dla } -1 \leq x < 2 \\ \frac{x-14}{3} & \text{dla } x \geq 2, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R},$

$$d) i(x) = \begin{cases} x+4 & \text{dla } x \leq 1 \\ -2x+6 & \text{dla } 1 < x < 5, \\ x-6 & \text{dla } x \geq 5. \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}$$

Dla każdej z tych funkcji odczytaj z jej wykresu:

- 1) miejsca zerowe,
- 2) przedziały, w których funkcja rośnie (maleje),
- 3) przedziały, w których funkcja jest dodatnia (ujemna).

5.47. Rozwiąż równania i podaj przybliżenia rozwiązań z dokładnością do 0,01.

- a) $11(x-1) = 4(x+2)$,
- b) $22x + 5(3-x) = 4(1-x) - 7(2-x)$,
- c) $5 - 6(2x-3) + 9(4-x) = 3(5x-2) - 8(x-2)$,
- d) $5(x-1) - 3(x-2) = 5 - (x-3)$.

5.48. Rozwiąż równania:

- a) $3x + 4(3-x) - (3x+2) = 3$,
- b) $8(3-2x) + 5(3x+1) = 8(1-x)$,
- c) $4(x+7) - 3(2x+3) = 5(2-x)$,
- d) $3(x+4) - 7(2x-3) = 8(x-5)$.

5.49. Rozwiąż równania:

- a) $26x - [22x - (30 - 3x)] = 38$,
- b) $9 - [8 - (7 - x)] = 2$,
- c) $5 - [(8x + 7) - 18x] = 9x$,
- d) $x(2-x) - 3x = x[x - (5 + 2x)]$.

5.50. Rozwiąż nierówności:

- a) $6(2x+1) - (4+x) > 5(x-2)$,
- b) $3(4-2x) + 4(x+3) \leq x+6$,
- c) $7(3-4x) - 2x \geq 3(2x-5)$,
- d) $6(4-3x) - 5(x+7) \leq 7x-1$,
- e) $\frac{5x-3}{2} - \frac{2-3x}{3} < \frac{x-2}{4}$,
- f) $(x-2)^2 + 3x < (x+2)^2 + 2x - 3$.

5.51. Rozwiąż nierówności:

- a) $3x - [7 - (5 - 4x)] - (x - 8) \geq 0$,
- b) $(8-x)^2 + 19 \leq (x-9)^2$,
- c) $(4x+1)^2 + (3x+2)^2 < (5x+2)^2$,
- d) $2x - (7x-8) \leq 4x - [7 - (x+5)]$,
- e) $2x - \frac{3x+1}{3} > 2 + \frac{5-4x}{2}$.

5.52. Rozwiąż nierówności:

- a) $(x-1)^2 + 7 > (x+4)^2$, d) $\frac{3x-7}{2} + x < 2(x-1)$,
b) $(1+x)^2 + 3x^2 < (2x-1)^2 + 7$, e) $\frac{4x+1}{2} > \frac{x+4}{5}$,
c) $(x-4)^2 + 6 < x^2 + 2x + 2$,

5.53. Znajdź liczby spełniające nierówność i należące do podanego obok zbioru:

- a) $\frac{2x-3}{2} + \frac{x}{3} < 1$, $x \in \mathbb{N}$;
b) $\frac{5-4x}{3} + x > -2x + \frac{1}{4}$, $x \in \mathbb{R}_+$;
c) $(x-3)^3 + 9x^2 - 5x + 2 > x^3 - 8$, $A = \{x: x \in \mathbb{C} \text{ i } x < 10\}$;
d) $\frac{x^2-x+4}{3} + \frac{2x-7}{2} < \frac{x^2}{3} + 3x - 1$, $x \in \mathbb{R}_-$.

5.54. Rozwiąż układ nierówności:

- a) $\begin{cases} 2x+4 > 3-x \\ 4-3x > 2+2x \end{cases}$
b) $\begin{cases} x-1 \geq 1-3x \\ 3x+2 \leq 7 \end{cases}$
c) $\begin{cases} 5(x-1) > 2(x+4) \\ 2x+4 > 8 \end{cases}$
d) $\begin{cases} 3-x \leq \frac{1}{2} + 2x \\ 2+x > 7x + \frac{3}{2} \end{cases}$
e) $\begin{cases} \frac{1-2x}{3} < \frac{1+3x}{4} \\ 1-7x \geq -6x \end{cases}$
f) $\begin{cases} (x+1)^2 + 7 > (x-4)^2 \\ (1+x)^2 + 3x^2 \leq (2x-1)^2 + 7 \end{cases}$

5.55. Rozwiąż nierówność podwójną:

- a) $2x+5 < 3x+4 < 4x+2$,
b) $2(x-1) < 3(x-1) < 4(x-1)$,
c) $(x+1)^2 \leq (x+2)^2 \leq (x+3)^2$,
d) $\frac{x+2}{3} < \frac{x+1}{4} < \frac{2x+1}{6}$.

5.56. Rozwiąż układy nierówności:

$$a) \begin{cases} x+4 > 2-3x \\ 4(x-1) > 2+7x, \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \frac{37-2x}{3} + 9 < \frac{3x-8}{4} - x \\ 3 - \frac{3x}{2} > \frac{5}{8} - \frac{4x-3}{6}, \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3+5x < 7x+4 \\ 3(x-2) < 4x-9, \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} (x+1)^2 + 7 > (x-4)^2 \\ (1+x)^2 + 3x^2 < (2x-1)^2 + 7, \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{3x}{2} - \frac{3}{5} < 4x-3, \\ \frac{x}{5} - 3\frac{1}{3} > 1\frac{3}{4} - \frac{5}{2}x, \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} \frac{7-6x}{2} + 12 < \frac{8x+1}{3} - 10x \\ 8 + \frac{3x-4}{5} > \frac{x-1}{6} - \frac{5x-3}{8}. \end{cases}$$

5.57. Rozwiąż równania:

$$a) |x+2| = 2(3-x),$$

$$c) |x| - |x-2| = 2,$$

$$b) |3x-2| + x = 11,$$

$$d) |2x| + 3x - 5 = |x-1|.$$

5.58. Znajdź najmniejszą liczbę całkowitą spełniającą równanie $|x-3| + 2|x+1| = 4$.

5.59. Znajdź wszystkie całkowite rozwiązania równania

$$a) |x-2| = -|x| + 2,$$

$$b) |x+1| + |x| = 3.$$

5.60. Rozwiąż nierówności

$$a) |5-2x| < 1,$$

$$c) |x-2| \leq |x+4|,$$

$$b) |3x-2,5| \geq 2,$$

$$d) 2|x+1| > x+4.$$

5.61. Rozwiąż równania (nierówności).

$$a) |4x-5| = 2,$$

$$d) 2|x| + |x-1| + |x+1| = 4,$$

$$b) |x-3| + |x+4| = 9,$$

$$e) |x+2| - |x| > 1,$$

$$c) |x+3| + |x-1| < 5,$$

$$f) |2x+6| + |3x-12| + |x| < 20.$$

5.62. Rozwiąż równanie i zbadaj dla jakich wartości parametru a równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie, nie ma rozwiązań, jest tożsamościowe.

$$a) 5x - a = 0,$$

$$d) ax - a = 0,$$

$$g) 3 + ax = 5x,$$

$$b) ax + 3 = a,$$

$$e) ax + 2a = 3ax,$$

$$h) ax - 3 = 7ax.$$

$$c) 2x - a = 5,$$

$$f) ax + 3 = 3a.$$

5.63. Rozwiąż równanie z niewiadomą x i zbadaj dla jakich wartości parametrów równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie, nie ma rozwiązania, jest tożsamościowe.

$$a) (a+b)x = c+d,$$

$$c) (a-b)x = cx+1,$$

$$b) (a-b+8)x = ax,$$

$$d) bx - a = ax - b,$$

$$\begin{array}{ll} \text{e) } cx - b = 3ax, & \text{g) } 2mx + 3m = 4x + 9, \\ \text{f) } a(2-x) = b(x+3), & \text{h) } mx - 2x + 1 = 4x - 2. \end{array}$$

5.64. Rozwiąż równania, w których niewiadomą jest x :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 17mx - 3am + 5bm - 8mx = 10mx - 5am + 7bm + mx, & \\ \text{b) } ax + bx = m + x, & \\ \text{c) } a(x-1) - b = x - a, & \text{f) } \frac{x+a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{x-b}{a} + \frac{a}{b}, \\ \text{d) } (x-a)(x-b) = x^2 - a^2, & \\ \text{e) } \frac{a-bx}{c} + x = \frac{cx-b}{c}, & \text{g) } \frac{ax-b^2}{a} - \frac{a(b-x)}{b} + \frac{b^2}{a} = a. \end{array}$$

5.65. Rozwiąż równanie z niewiadomą x . Przeprowadź dyskusję istnienia rozwiązań i ich liczby ze względu na wartości parametrów.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } ax - a^2 = 2x - 4, & \text{d) } a^2x - 2ab - b^2 = a^2 - b^2x, \\ \text{b) } bx + ab^2 = abx + b^2c, & \text{e) } m^2x + 3n^2 = 3m^2 - n^2x - 2mnx, \\ \text{c) } mx - 5m + 5n = nx, & \text{f) } a(x+b) = c. \end{array}$$

5.66. Rozwiąż równanie z niewiadomą x . Przeprowadź dyskusję istnienia i liczby rozwiązań równania ze względu na wartości parametrów.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 5(x-a) = 3(x+b), & \text{c) } x + \frac{x}{a} = b, \\ \text{b) } 2(3x-5a) + 9(2a-7b) + 3(5a-2x) = 0, & \text{d) } x - a = \frac{x}{b}. \end{array}$$

5.67. Dane jest równanie z niewiadomą x :

$$\begin{array}{ll} 1) |mx| + |x| = 1, & 2) |mx| - |x| = 1. \\ \text{a) } \text{rozwiąż równanie dla } m = -1, m = 0, m = \frac{1}{2}, & \end{array}$$

b) zbadaj dla jakich wartości m równanie ma rozwiązanie.

5.68. Naszkicuj na jednym rysunku pary wykresów funkcji:

$$x \rightarrow y = f(x) \quad \text{i} \quad x \rightarrow y = g(x),$$

Następnie odczytaj z wykresów rozwiązanie równania $f(x) = g(x)$ i nierówności $f(x) < g(x)$.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = x + 5, & g(x) = |x|; \\ \text{b) } f(x) = 2x - 3, & g(x) = |x - 6|; \\ \text{c) } f(x) = -x + 2, & g(x) = |2x|; \\ \text{d) } f(x) = 4, & g(x) = |x| - 1. \end{array}$$

Sprawdź rachunkowo otrzymane odpowiedzi.

5.69. Kawałek stopu miedzi z ołowiem waży 12 kg, i zawiera 45% miedzi. Ile kilogramów czystego ołowiu należy stopić z tym stopem, aby nowy stop zawierał 30% miedzi?

- 5.70. Naczynie litrowe jest całkowicie napelnione 80% roztworem soli. Ile należy odlać z naczynia roztworu, aby po uzupełnieniu zawartości naczynia czystą wodą otrzymać roztwór 50%?
- 5.71. W dwóch naczyniach znajduje się roztwór kwasu, w pierwszym naczyniu — 10-procentowy, a w drugim — 50-procentowy. Po ile litrów kwasu trzeba odlać z każdego naczynia, aby po zmieszaniu odlanego kwasu otrzymać 140 litrów 30% roztworu?
- 5.72. Dane są dwa kawałki stopu złota ze srebrem. W pierwszym kawałku masa złota do masy srebra jest jak 2:3, a w drugim 3:7. Ile kilogramów należy odciąć z każdego kawałka, aby po stopieniu odciętych części otrzymać 1,6 kg stopu, w którym masa złota do masy srebra będzie jak 5:11?
- 5.73. Ile litrów 15-procentowego roztworu kwasu solnego, a ile 30-procentowego roztworu tego kwasu należy zmieszać, aby otrzymać 18 litrów 20-procentowego roztworu kwasu solnego?
- 5.74. Zmieszano 3 litry 7% roztworu soli z 6 litrami 4% roztworu soli. Jakie jest stężenie soli w mieszaninie?
- 5.75. Z naczynia zawierającego 10 litrów 3% wodnego roztworu soli odlano połowę, a następnie dolano 5 litrów czystej wody. Jakie jest stężenie soli w nowym roztworze?
- 5.76. Dwa zakłady wyprodukowały w ubiegłym roku towary o łącznej wartości 25 mld zł. W bieżącym roku wartość produkcji pierwszego zakładu ma wzrosnąć o 5%, a drugiego o 20%. Łączna wartość produkcji obu zakładów ma być wyższa o 12,8%. Jaka była wartość produkcji w każdym z tych zakładów w ubiegłym roku?
- 5.77. W pewnym zakładzie kobiety stanowią 40% załogi, przy czym 10% zatrudnionych kobiet oraz 20 mężczyzn wkracza w wiek emerytalny. Okazuje się, że przejście tych osób na emeryturę spowoduje zmniejszenie stanu załogi o 8%. Ile osób pracuje w tym zakładzie?
- 5.78. Ktoś kupił dwa przedmioty za 1.000 zł i sprzedał je z łącznym zyskiem 8%. Ile zapłacił za każdy przedmiot, jeżeli pierwszy sprzedał z zyskiem 20%, a drugi — ze stratą 10%?
- 5.79. Filatelista kupił dwa znaczki za 900 zł, a po pewnym czasie sprzedał je za 1.000 zł. Ile zapłacił za każdy znaczek, jeżeli pierwszy sprzedał z zyskiem 10%, a drugi — z zyskiem $13\frac{1}{3}\%$?

5.80. Dwa zespoły górników zobowiązały się wydobyć 22.400 ton węgla w 40 dni. Po 10 dniach dzienna wydajność pierwszego zespołu wzrosła o 25%, a drugiego zmalała o 25%, ale zobowiązanie wykonano w ciągu 38 dni. Oblicz początkową wydajność każdego zespołu.

5.81. Oblicz pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji

$$y = \left| \frac{1}{2}x + 2 \right| - 2 \quad \text{ i } \quad y = 2.$$

5.82. Zaznacz na osi liczbowej następujące zbiory:

- | | |
|---|--|
| a) $\{x \in \mathbf{R}: x \leq 1\},$ | d) $\{x \in \mathbf{C}: \sqrt{ x } \leq 2\},$ |
| b) $\{x \in \mathbf{R}: x > 2\},$ | e) $\left\{x \in \mathbf{R}: 0 < \frac{1}{x} < 1\right\},$ |
| c) $\{x \in \mathbf{R}: x + x = 0\},$ | f) $\{x \in \mathbf{R}: x+3 < 2\}.$ |

5.83. Zaznacz na osi liczbowej następujące zbiory:

- a) $\{x \in \mathbf{R}: (x+1)^2 < (x+2)^2 \text{ i } |x| < 2\},$
 b) $\{x \in \mathbf{R}: |x+2| < 3 \text{ i } |2x-3| < 2\},$
 c) $\{x \in \mathbf{R}: 5x+3 \geq 8x+21 \text{ lub } 4(1+x) < 3x+5\},$
 d) $\left\{x \in \mathbf{R}: |x-1|+x < 1 \text{ lub } 3x > 2 - \frac{2x-13}{11}\right\}.$