

Zestaw 6 - Moce zbiorów

A Teoria

Definicja. A.1. (Zbiory równoliczne)

Dwa zbiory A i B są równoliczne, gdy istnieje bijekcja $f : A \rightarrow B$ (tzn. funkcja $f : A \rightarrow B$ jest różnowartościowa i 'na').

Definicja. A.2. (Zbiory przeliczalne)

Mówimy, że zbiór A jest przeliczalny, gdy jest skończony lub równoliczny ze zbiorem $\mathbb{N}$ wszystkich liczb naturalnych.

Twierdzenie. A.1. Dowolny podzbiór zbioru przeliczalnego jest przeliczalny (tzn. jeżeli A jest zbiorem przeliczalnym i $B \subset A$, to B też jest zbiorem przeliczalnym).

Twierdzenie. A.2. Zbiór równoliczny ze zbiorem przeliczalnym jest zbiorem przeliczalnym.

Twierdzenie. A.3. Zbiór $\mathbb{Q}$ wszystkich liczb wymiernych jest przeliczalny.

Twierdzenie. A.4. Niech A będzie zbiorem przeliczalnym. Jeżeli istnieje funkcja różnowartościowa $f : B \rightarrow A$, to zbiór B również jest przeliczalny.

Twierdzenie. A.5. Jeżeli zbiory A i B są przeliczalne, to zbiór $A \times B$ też jest przeliczalny.

Twierdzenie. A.6. Niech A będzie zbiorem przeliczalnym. Jeżeli istnieje funkcja 'na' $f : A \rightarrow B$, to zbiór B również jest przeliczalny.

Twierdzenie. A.7. Suma przeliczalnej rodziny zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym (tzn. jeżeli zbiór T jest przeliczalny i dla każdego $t \in T$ zbiór A_t jest przeliczalny, to suma $\bigcup_{t \in T} A_t$ jest zbiorem przeliczalnym).

Definicja. A.3. (Zbiory mocy continuum)

Mówimy, że zbiór A jest mocy continuum, gdy jest równoliczny ze zbiorem $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych.

Twierdzenie. A.8. Jeżeli zbiór A jest równoliczny z B , a B jest równoliczny z C , to A jest równoliczny z C .

Twierdzenie. A.9. (Cantor-Bernsteina)

Jeżeli $A \subset B \subset C$ oraz zbiory A i C są równoliczne, to również zbiór B jest równoliczny z A i C .

Twierdzenie. A.10. Jeżeli zbiór A jest mocy c oraz zbiór B jest przeliczalny, to różnica $A \setminus B$ jest zbiorem mocy c .

Twierdzenie. A.11. Jeżeli zbiory A i B są mocy c , to iloczyn kartezjanski $A \times B$ również jest mocy c .

B Zadania

Zadanie B.1. Pokazać, że zbiór liczb naturalnych i zbiór liczb całkowitych są równoliczne.

Zadanie B.2. Pokazać, że zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ i zbiór $\mathbb{N} \cup \{\sqrt{2}\}$ są równoliczne.

Zadanie B.3. Pokazać, że zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ i zbiór $\mathbb{N} \setminus \{2010\}$ są równoliczne.

Zadanie B.4. Pokazać, że zbiory $(0, 1)$ i $\mathbb{R}$ są równoliczne.

Zadanie B.5. Pokazać, że zbiory $(4, 5)$ i $(7, 13)$ są równoliczne.

Zadanie B.6. Pokazać, że zbiory $(1, 3)$ i $(1, 3) \cup \{4\}$ są równoliczne.

Zadanie B.7. Zbiór $\mathbb{Z}$ wszystkich liczb całkowitych jest przeliczalny.

Zadanie B.8. Zbiór parzystych liczb całkowitych jest przeliczalny.

Zadanie B.9. Pokazać, że odcinek $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ jest mocy continuum

Zadanie B.10. Pokazać, że odcinek $[6, 7]$ jest mocy continuum.

Zadanie B.11. Dla danych zbiorów $A, B \subseteq \mathbb{R}$ udowodnij, że $|A| = |B|$ znajdując każdorazowo bijekcję.

$A = \mathbb{N}$ i $B = \mathbb{N} \setminus \{138\}$,

$A = \mathbb{N}$ i $B = \mathbb{N} \setminus \{13, 25\}$,

$A = \mathbb{N}$ i $B = \mathbb{N} \setminus \{10, 11, 12, \dots, 100\}$,

$$A = \mathbb{N} \text{ i } B = \mathbb{N} \cup \{\frac{1}{2}\},$$

$$A = \mathbb{N} \text{ i } B = \mathbb{N} \cup \{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\},$$

$$A = \{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}_0\}, B = \{\frac{1}{n+2} : n \in \mathbb{N}_0\}$$

$$A = \{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}_0\}, B = \{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{0\}$$

$$A = (0, 1), B = (0, 1) \cup \{1, 2, 3\}$$

Zadanie B.12. Dowieść przy pomocy Twierdzenia Cantora-Bernsteina, że AB gdzie A -odcinek otwarty (np. $(0,1)$), B -odcinek jednostronnie domknięty (np. $(0,1]$).