

Zestaw 12 - Krzywe stożkowe

A Zadania

Zadanie A.1. :

- Znaleźć równanie okręgu mającego środek $S = (1, -2)$ i przechodzącego przez punkt $A = (3, 5)$, odp. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 53$;
- Wyznaczyć współrzędne środka i promień okręgu $x^2 - 2x + y^2 + 6y = 0$, odp. $S = (1, -3)$, $r = \sqrt{10}$;
- Znaleźć równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC o wierzchołkach $A = (0, 0)$, $B = (8, 0)$, $C = (0, 6)$, odp. $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$;
- Znaleźć równanie okręgu, który przechodzi przez punkty $P = (2, 3)$, $Q = (5, 2)$ i ma środek na osi Ox , odp. $(x - \frac{8}{3})^2 + y^2 = \frac{85}{9}$;
- Znaleźć równanie okręgu, który jest styczny do osi układu współrzędnych i przechodzi przez punkt $A = (5, 8)$, odp. $(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$, $r = 13 - 4\sqrt{5}$ lub $r = 13 + 4\sqrt{5}$;

Zadanie A.2. Znaleźć równanie stycznej okręgu $x^2 + y^2 = 25$

- w punkcie $(-3, 4)$, odp. $-3x + 4y = 25$;
- przechodzącej przez punkt $(12, 0)$, odp. $y = 5\sqrt{\frac{5}{19}}(x - 12)$ lub $y = -5\sqrt{\frac{5}{19}}(x - 12)$;
- równoległej do prostej $x - y - 4 = 0$, odp. $y = x + 5\sqrt{2}$ lub $y = x - 5\sqrt{2}$;
- prostopadłej do prostej $x + 2y = 0$, odp. $y = 2x + 5\sqrt{5}$ lub $y = 2x - 5\sqrt{5}$.

Zadanie A.3. :

- Napisać równanie elipsy o środku w początku układu współrzędnych i wierzchołkach $K = (-5, 0)$, $V = (0, 3)$, odp. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$;
- Obliczyć współrzędne ognisk elipsy $\frac{(x-7)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$, odp. $F_1 = (4, -1)$, $F_2 = (10, -1)$;
- Znaleźć osie i środek elipsy $x^2 - 4x + 4y^2 = 0$, odp. $2a = 4$, $2b = 2$, $S = (2, 0)$;
- Punkty $A = (0, -4)$ oraz $B = (6, 0)$ są wierzchołkami podstawy trójkąta równoramiennego ABC wpisanego w elipsę $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$. Znaleźć współrzędne wierzchołka C . Ile rozwiązań ma to zadanie? odp. $C = \left(\frac{135}{97} + \frac{132\sqrt{3}}{97}, \frac{40}{97} - \frac{198\sqrt{3}}{97}\right)$ lub $C = \left(\frac{135}{97} - \frac{132\sqrt{3}}{97}, \frac{40}{97} + \frac{198\sqrt{3}}{97}\right)$.

Zadanie A.4. :

- Napisać równanie stycznej elipsy $4x^2 + 25y^2 = 100$ w punkcie $P_1 = (\frac{5\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$, odp. $2x - 5y = \sqrt{2}$;
- Wyznaczyć równania stycznych elipsy $x^2 + 9y^2 = 9$ przechodzących przez punkt $A = (5, 0)$, odp. $y = \frac{1}{4}(x - 5)$, $y = -\frac{1}{4}(x - 5)$.

Zadanie A.5. :

- Znaleźć równanie hiperboli o środku $S = (0, 0)$, wierzchołku $L = (2, 0)$ i ognisku $F_2 = (5, 0)$, odp. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{21} = 1$;
- Proste $y = 3x$, $y = -3x$ są asymptotami, a punkt $L = (4, 0)$ jest wierzchołkiem hiperboli. Znaleźć współrzędne ognisk, odp. $F_1 = (-4\sqrt{10}, 0)$, $F_2 = (4\sqrt{10}, 0)$;
- Osie układu współrzędnych są osiami symetrii hiperboli. Znaleźć równanie hiperboli wiedząc, że przechodzi przez punkty $A = (\sqrt{5}, \sqrt{5})$, $B = (4, \frac{2}{3}\sqrt{7})$, odp. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

Zadanie A.6. :

- Znaleźć równanie paraboli, która ma wierzchołek w początku układu współrzędnych i ognisko $F = (-3, 0)$, odp. $y^2 = -12x$;
- Znaleźć równanie paraboli, która przechodzi przez punkty $A = (0, 0)$, $B = (2, 1)$, $C = (8, -2)$ i ma poziomą oś symetrii, odp. $y^2 = \frac{1}{2}x$;
- Wyznaczyć współrzędne ogniska i równanie kierownicy paraboli $y = x^2 + 3$, odp. $x = \frac{11}{4}$, $F = (0, \frac{13}{4})$;
- Środkiem cięciwy paraboli $y^2 = 6x$ jest punkt $S = (3, 2)$. Znaleźć współrzędne końców tej cięciwy, odp. $\left(3 + \frac{2\sqrt{14}}{3}, 2 + \sqrt{14}\right)$, $\left(3 - \frac{2\sqrt{14}}{3}, 2 - \sqrt{14}\right)$.

Zadanie A.7. :

- Podać równanie stycznej paraboli $y^2 = -2x$ w punkcie $P_1 = (-2, 2)$, odp. $x + 2y = 2$;
- Znaleźć równanie stycznej paraboli $y = x^2 - 1$, która jest równoległa do prostej $y = -2x + 5$, odp. $y = -2(x + 1)$;
- Wyznaczyć równania stycznych paraboli $y^2 = 6x$, które przechodzą przez punkt $A = (-1, 0)$, odp. $y = \sqrt{\frac{3}{2}}(x + 1)$ lub $y = -\sqrt{\frac{3}{2}}(x + 1)$;