

Odpowiedzi Zestaw 6 - Pochodna funkcji

1 Odpowiedzi

Odpowiedź 1.1. Zbadać różniczkowalność funkcji:

a) $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$; odp. funkcja f jest ciągła (czyli spełniony jest warunek konieczny różniczkowalności funkcji), jedynym problematycznym punktem jest $x = 0$; pochodną w punkcie $x = 0$ badamy z definicji; należy policzyć pochodną lewostronną i prawostronną w punkcie $x = 0$ i sprawdzić czy są równe. Jeżeli tak, to znaczy, że istnieje pochodna w funkcji f w punkcie $x = 0$. Po wykonaniu tych czynności otrzymujemy, że pochodna funkcji f w punkcie 0 nie istnieje.

b) $f(x) = |x|^3$, $x \in \mathbb{R}$; odp. sposób rozwiązania jest analogiczny z metodą rozwiązania pkt a). Ostatecznie otrzymujemy,

$$\text{że pochodna jest równa } f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ -3x^2 & \text{dla } x < 0, \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}, \text{ odp. } f(x) = \begin{cases} \frac{(x^2+1) \arctan \frac{1}{x} - x}{x^2+1} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} x^2 \arctan \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}, \text{ odp. } f(x) = \begin{cases} \frac{(x^2+1)2x \arctan \frac{1}{x} - x^2}{x^2+1} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Odpowiedź 1.2. Korzystając z definicji obliczyć pochodne podanych funkcji:

$$\text{a) } f(x) = x^2 - 3x, x \in \mathbb{R}, \text{ odp. } 2x - 3$$

$$\text{b) } f(x) = e^{-x}, x \in \mathbb{R}, \text{ odp. } -e^{-x}$$

$$\text{c) } f(x) = \sqrt[3]{x}, x \neq 0, \text{ odp. } \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Odpowiedź 1.3. Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej wyznaczyć pochodne funkcji:

$$\text{a) } f(x) = \arctan x, x \in \mathbb{R}, \text{ odp. } \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{b) } f(x) = \log_a x, x > 0, \text{ odp. } \frac{1}{x \ln a}$$

Odpowiedź 1.4. Korzystając z odpowiednich wzorów i reguł różniczkowania obliczyć pochodne podanych funkcji:

$$\text{a) } f(x) = \frac{2x^2+x+1}{x^2-x+1}, \text{ odp. } f'(x) = \frac{2(x^4-x+1)-x^2(4x-5)}{(x^2-x+1)^2}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{x+\sqrt{x}}{x-2\sqrt[3]{x}}, \text{ odp. } f'(x) = \frac{-8x^{\frac{1}{3}}-3x^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{6}}}{6(x-2x^{\frac{1}{3}})^2}$$

$$\text{c) } f(x) = \ln \tan \frac{x}{3}, \text{ odp. } f'(x) = \frac{2}{(\sin 2\frac{x}{3})^2};$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{\cos x + \sin x}{2 - \cos x}, \text{ odp. } f'(x) = \frac{2(\cos x - \sin x) - 1}{(2 - \cos x)^2}$$

$$\text{e) } f(x) = \arcsin \sqrt[4]{1-5x}, \text{ odp. } f'(x) = \frac{-5}{4\sqrt{1-\sqrt{1-5x}}\sqrt[4]{(1-5x)^3}}$$

$$\text{f) } f(x) = \log(e^x + \sqrt{1+e^x}), \text{ odp. } f'(x) = 1 - \frac{e^x+2}{2(e^x\sqrt{1+e^x}+1+e^x)}$$

$$\text{g) } f(x) = \sin^7 \frac{2^x+1}{3^x+1}, \text{ odp. } f'(x) = 7 \sin \frac{2^x+1}{3^x+1} \cos \frac{2^x+1}{3^x+1} \frac{6^x \ln \frac{2}{3} + 2^x \ln 2 - 3^x \ln 3}{(3^x+1)^2}$$

$$\text{h) } f(x) = \log_x 5, \text{ odp. } f'(x) = -\frac{\ln 5}{x(\ln x)^2}$$

$$\text{i) } f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}, \text{ odp. } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \cdot (1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}) \cdot (1 + \frac{1}{2\sqrt{x}})$$

$$\text{j) } f(x) = \sqrt{x}, \text{ odp. } f'(x) = e^{\frac{1}{x} \ln x} \cdot (-\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x^2}) = x^{\frac{1-2x}{x}} \cdot (1 - \ln x)$$

$$\text{k) } f(x) = x^{\sin x}, \text{ odp. } f'(x) = e^{\sin x \ln x} \cdot (\cos x \ln x + \frac{1}{x} \sin x).$$

Odpowiedź 1.5. Niech $f(x) = \cos(\sin \sqrt{x})$, $x > 0$. Obliczyć $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$, odp. $-\frac{1}{2}$.

Odpowiedź 1.6. Niech $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $x > 1$. Obliczyć $\lim_{x \rightarrow \infty} x f'(x)$, odp. 1.

Odpowiedź 1.7. Niech funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x + a & x \leq -1 \\ -bx^2 + 2 & -1 < x \leq 0 \\ c \cos x + d & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ dp^{\cos x} + p - 1 & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Dobrać parametry a, b, c, d, p tak, aby funkcja f była różniczkowalna w $\mathbb{R}$, odp. $p = 1$, $a + b = 3$, $c + d = 2$, jeżeli dodatkowo policzymy pochodne lewostronne i prawostronne w punktach $-1, 0, \frac{\pi}{2}$, to uda nam się uzyskać dokładne wartości $a = 2\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = d = 1$.

Odpowiedź 1.8. Dobrać tak wartości współczynników a i b , aby funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + x + 1 & x < 1 \\ x^2 + ax + b & x \geq 1. \end{cases}$$

była różniczkowalna w $\mathbb{R}$, odp. $a = b = 1$.

Odpowiedź 1.9. Wykaż, że:

$$a) \quad \bigwedge_{x \geq 1} x^2 - 1 - 2 \log x \geq 0.$$

$$b) \quad \bigwedge_{x \geq 0} \arctan x \geq \frac{x}{1 + x^2}.$$

$$c) \quad \bigwedge_{x \in (0,1)} \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Odpowiedź 1.10. Wykaż, że:

$$n(b - a)a^{n-1} < b^n - a^n < n(b - a)b^{n-1}$$

dla dowolnych a, b , $0 < a < b$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Rozważ funkcję $f(x) = x^n$ gdy $x \in [a, b]$.