

Zadanie 1. Marcin i Tomek malują mieszkanie. Gdyby Marcin pracował sam, to zajęłoby mu to 10 dni. Gdyby Tomek malował sam, to pracowałby 15 dni. W ciągu ilu dni pomalują mieszkanie razem?

Rozwiązanie:

- x – liczba dni potrzebnych, aby chłopcy pomalowali mieszkanie wspólnie, $x > 0$.
- $1/x$ – dzienna wydajność wspólnej pracy chłopców (tzn. taką część mieszkania chłopcy pomalują razem w ciągu jednego dnia)
- $1/15$ –dzienna wydajność pracy Tomka (tzn. taką część mieszkania Tomek pomaluje w ciągu dnia pracując samodzielnie)
- $1/10$ –dzienna wydajność pracy Marcina (taką część mieszkania Marcin pomaluje w ciągu dnia pracując samodzielnie)

Piszemy równanie na wspólną wydajność pracy chłopców (ich wspólna wydajność jest sumą ich samodzielnych wydajności, innymi słowy: to jaką część mieszkania pomalują razem w ciągu dnia, jest sumą części, którą Tomek pomaluje sam w ciągu dnia i części, którą Marcin pomaluje sam w ciągu dnia)

$$1/x = 1/15 + 1/10$$

$$1/x = 5/30$$

$$1/x = 1/6$$

$$x=6$$

Odpowiedź: Chłopcy razem pomalują mieszkanie w 6 dni.

Zadanie 2. Dwie sekretarki wykonały pewną pracę w 12h. Gdyby pierwsza z nich sama wykonała połowę pracy, a druga resztę, to zajęłoby im to 25h. W ciągu ilu godzin, pracując oddzielnie, każda z nich wykonałaby tę pracę?

Rozwiązanie:

- $1/12$ – dzienna wydajność wspólnej pracy sekretarek (tzn. taką część całej pracy wykonają sekretarki pracując razem w ciągu jednego dnia)
- x – liczba godzin potrzebnych, aby pierwsza sekretarka sama wszystko zrobiła, $x > 0$
- y – liczba godzin potrzebnych, aby pierwsza sekretarka sama wszystko zrobiła, $y > 0$.
- $1/x$ – dzienna wydajność pracy pierwszej sekretarki (taką część całej pracy wykona pierwsza sekretarka w ciągu jednego dnia)
- $1/y$ – dzienna wydajność pracy drugiej sekretarki (taką część całej pracy wykona druga sekretarka w ciągu jednego dnia)

$$x/2 \quad - \text{liczba godzin potrzebnych, aby pierwsza sekretarka sama zrobiła połowę wszystkiego}$$

$$y/2 \quad - \text{liczba godzin potrzebnych, aby druga sekretarka sama zrobiła połowę wszystkiego}$$

Piszemy równanie: 25 godzin to czas potrzebny, aby najpierw połowę pracy wykonała pierwsza sekretarka, a następnie, pozostałą połowę pracy, druga sekretarka.

$$25 = x/2 + y/2$$

Drugie równanie dotyczyć będzie wspólnej wydajności pracy sekretarek (ich wspólna wydajność jest sumą ich samodzielnych wydajności)

$$1/12 = 1/x + 1/y$$

Mamy zatem układ równań:

$$25 = x/2 + y/2 \quad // \text{razy } 2$$

$$1/12 = 1/x + 1/y \quad // \text{razy } 12xy$$

$$50 = x + y$$

$$xy = 12x + 12y$$

$$y = 50 - x$$

$$x(50 - x) = 12x + 12(50 - x)$$

$$y = 50 - x$$

$$0 = x^2 - 50x + 600$$

Mamy więc dwa rozwiązania:

$$x = 30 \quad \text{lub } x = 20$$

$$y = 20 \quad y = 30$$

Odpowiedź. Jedna z sekretarek, pracując samodzielnie, wykonałaby pracę w ciągu 20h, a druga w ciągu 30h.

Zadanie 3. Basen można napełnić dwoma kranami w czasie 6h. Pierwszy kran napełnia basen w czasie 5h krótszym niż drugi. W ciągu ilu godzin każdy kran oddzielnie napełni basen?

x – liczba godzin potrzebnych, aby basen napełnił się tylko przez pierwszy kran, $x > 0$

y – liczba godzin potrzebnych, aby basen napełnił się tylko przez drugi kran, $y > 0$.

$1/x$ – taką część całego basenu napełni woda tylko z pierwszego kranika w ciągu 1 godziny

$1/y$ – taką część całego basenu napełni woda tylko z pierwszego kranika w ciągu 1 godziny

$1/6$ taką część całego basenu napełni woda z dwóch kranów razem w ciągu 1 godziny
(bo potrzeba 6godzin aby dwa krany razem napełniły basen).

Piszemy dwa równania:

pierwsze dotyczące „wydajności” kraników,

$$\text{tzn. } 1/6 = 1/x + 1/y$$

oraz drugie równanie, dot. faktu, że pierwszy napełnia basen 5h szybciej:

$$y = x + 5$$

Mnożąc pierwsze równanie przez $6xy$, a następnie wstawiając $y = x + 5$ otrzymamy

$$xy = 6y + 6x$$

$$x(x + 5) = 6(x + 5) + 6x$$

$$x^2 - 7x - 30 = 0$$

$$x = -3 \text{ (sprzeczność) lub } x = 10$$

Zatem $x = 10$, $y = 15$.

Odpowiedź. Pierwszy kranik napełni basen w ciągu 10h, natomiast drugi w ciągu 15h.