

DMAD - zasada szufladkowa

Zasada szufladkowa

Jeżeli n przedmiotów (elementów) rozmieścimy w m szufladkach, przy czym $n > m$, to w **przynajmniej jednej** (pewnej) szufladce znajdą się co najmniej dwa przedmioty.

Zasada szufladkowa - wersja rozszerzona

Jeżeli n przedmiotów (elementów) rozmieścimy w m szufladkach, przy czym $n > m \cdot k$ (k -liczba naturalna), to w **przynajmniej jednej** (pewnej) szufladce znajdzie się co najmniej $k + 1$ przedmiotów.

A Zadania na ćwiczenia

Zadanie A.1. Udowodnij, że wśród dowolnie wybranych 11 liczb naturalnych zawsze znajdą się dwie z tą samą ostatnią cyfrą.

Zadanie A.2. Pokaż, że wśród 10 kart wybranych z talii 52 kart co najmniej 3 karty są tego samego koloru.

Zadanie A.3. W kwadracie o boku 1 wybrano 103 punkty (być może leżące na brzegu) w taki sposób, że żadne 3 z nich nie leżą na jednej prostej. Wykaż, że pewne trzy z tych punktów tworzą trójkąt o polu nie większym niż 0,01.

Zadanie A.4. Danych jest 12 różnych dwucyfrowych liczb naturalnych. Pokaż, że można wybrać pewne dwie z nich tak, aby ich różnica była postaci $\overline{aa}$ (gdzie a jest cyfrą).

Zadanie A.5. Na płaszczyźnie danych jest pięć punktów kratowych (czyli punktów o obu współrzędnych całkowitych). Udowodnij, że środek jednego z odcinków łączących te punkty też jest punktem kratowym.

Zadanie A.6. Dany jest zbiór złożony z dziesięciu liczb naturalnych, dwucyfrowych w rozwinięciu dziesiętnym. Pokazać, że w tym zbiorze istnieją takie dwa niepuste podzbiory, że sumy liczb obu podzbiorów są równe.

Zadanie A.7. Pokazać, że dla dowolnych $n + 1$ różnych dodatnich liczb całkowitych mniejszych bądź równych $2n$ istnieją dwie, które są względnie pierwsze.

B Zadania na ćwiczenia - jeśli czas pozwoli

Zadanie B.1. Pokazać, że dla dowolnego zbioru n dodatnich liczb całkowitych istnieje jego niepusty podzbiór, którego suma liczb jest podzielna przez n .

Zadanie B.2. Niech dla ustalonego n naturalnego A będzie podzbiorem mocy $n + 1$ zbioru $\{1, 2, \dots, 2n\}$. Udowodnić, że A zawiera dwie różne liczby a i b , takie że a jest dzielnikiem b .

Zadanie B.3. Przy okrągłym stole jest 100 miejsc oznaczonych proporzycami 100 różnych państw. Ambasadorowie tych państw usiedli przy stole w sposób losowy, ale tak, że żaden z nich nie usiadł na odpowiednim miejscu. Udowodnij, że można tak obrócić okrągły stół, aby co najmniej dwóch ambasadorów siedziało przy właściwych proporczykach.

Zadanie B.4. Na płaszczyźnie danych jest 6 punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. W każdym trójkącie wyznaczonym przez pewną trójkę tych punktów najkrótszy bok malujemy na czerwono. Udowodnij, że istnieją trójkąty o wszystkich bokach czerwonych.

Zadanie B.5. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej istnieje taka jej wielokrotność, którą można zapisać w systemie dziesiętnym używając wyłącznie cyfr 0 i 1.

Zadanie B.6. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z kolorów: biały lub czarny. Pokaż, że istnieją dwa punkty w tym samym kolorze w odległości dokładnie 1cm.

C Zadania do samodzielnej pracy w domu

Zadanie C.1. W sali znajduje się 47 osób. Wykaż, że wśród nich znajdzie się 7 osób urodzonych tego samego dnia tygodnia.

Zadanie C.2. Pokazać, że dla dowolnych $n + 1$ różnych, dodatnich liczb całkowitych, mniejszych bądź równych $2n$ istnieją dwie, które sumują się do $2n + 1$.

Zadanie C.3. Danych jest 1001 liczb naturalnych. Udowodnij, że istnieje wśród nich 501 liczb parzystych lub 501 liczb nieparzystych.

Zadanie C.4. W grupie 20 studentów przeprowadzono ankietę dotyczącą filmów: Avengers i Star Wars. Możliwe były 3 odpowiedzi: widziałem/am, nie widziałem/am, brak odpowiedzi. Pokaż, że pewnych 3 studentów udzieliło tych samych odpowiedzi.

Zadanie C.5. Na nieskończonej szachownicy ustawionych jest 1999 skoczków szachowych. Udowodnij, że można spośród nich wybrać 1000 takich, że żadne dwa z nich się nie atakują.

Zadanie C.6. Udowodnij, że w dowolnym wielościanie:

- a) istnieją dwa wierzchołki, z których wychodzi taka sama liczba krawędzi;
- b) istnieją dwie ściany, które mają tyle samo krawędzi.

Zadanie C.7. W kole o promieniu 1

- a) wybrano 8 punktów. Wykaż, że istnieje wśród nich co najmniej jedna para punktów, których odległość nie przekracza 1.
- b) wybrano 14 punktów, z których żadne 3 nie są współliniowe. Wykaż, że 3 z nich tworzą trójkąt o polu co najwyżej 0.6.

Zadanie C.8. Wewnątrz kwadratu o boku długości 1 wybrano 51 punktów. Wykaż, że pewne trzy z nich leżą w kole o promieniu $\frac{1}{7}$.