

Odpowiedzi Zestaw 5 - Macierze c.d, Liniowa niezależność wektorów i baza

A Zadania

Zadanie A.1. Korzystając z twierdzenia o postaci macierzy odwrotnej znaleźć macierze odwrotne do podanych:

a) $A = \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix},$

odp. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1-i & -1 \\ -1 & 1+i \end{bmatrix};$

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix},$

odp. $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1-i}{2} \\ \frac{i-1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix},$

odp. $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$

odp. $D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$

e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$

odp. $E^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$

f) $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$

$F^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix};$

Zadanie A.2. Rozwiązać podane równanie macierzowe wykorzystując operację odwracania macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = 4X + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$

odp. $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$

odp.

$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

odp.

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie A.3. Korzystając z definicji zbadać liniową niezależność podanych układów wektorów we wskazanych przestrzeniach:

- a) $\vec{v}_1 = (1, 2)$, $\vec{v}_2 = (-1, 0)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^2$, odp. układ liniowo niezależny $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$;
- b) $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 1, 0)$, $\vec{v}_3 = (1, 1, 1)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$, odp. układ liniowo niezależny $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$;
- c) $\vec{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 2)$, $\vec{v}_3 = (0, 0, 2)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$, odp. układ liniowo niezależny $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$;
- d) $\vec{v}_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (2, 2, 2, 2, 2)$, $\vec{v}_3 = (3, 3, 3, 3, 3)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^5$, odp. układ liniowo zależny $\alpha_1 = \alpha_2 = t, \alpha_3 = -t$;

Zadanie A.4. Sprawdź liniową niezależność wektorów:

- a) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$, $V_1 = (1, -2)$, $V_2 = (2, 3)$, odp. układ liniowo niezależny $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$;
- b) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$, $V_1 = (-1, -2)$, $V_2 = (-2, 1)$, $V_3 = (1, 0)$, odp. układ liniowo zależny $\alpha_1 = \frac{t}{2}, \alpha_2 = t, \alpha_3 = \frac{5}{2}t$;