

Praca domowa 4

Trygonometria

1. [za każdy podpunkt 1p.]

Zamień miarę stopniową na miarę łukową dla kątów:

- a) 5° , b) -300° ,
c) 20° , d) -272° .

2. [za każdy podpunkt 1p.]

Zamień miarę łukową na stopniową dla kątów:

- a) $\frac{3}{4}\pi$, b) $-\frac{12}{5}\pi$,
c) 10π , d) $-\frac{1}{180}\pi$.

3. [za każdy podpunkt 2p.]

Obliczyć, korzystając ze wzorów redukcyjnych oraz okresowości funkcji trygonometrycznych.

- a) $\sin \frac{3}{2}\pi$, b) $\operatorname{ctg} \frac{3}{4}\pi$,
c) $\operatorname{ctg}(-\frac{23}{4}\pi)$, d) $\cos \frac{407}{6}\pi$.

4. [za każdy podpunkt 2p.]

Podane liczby uporządkować rosnąco

- a) $a = \cos 0$, $b = \cos 1$, $c = \cos \frac{\pi}{3}$, $d = \cos \pi$;
b) $a = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}$, $b = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}$, $c = \operatorname{ctg} 3$, $d = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2}$.

5. [za całe zadanie 5p.]

Wykaż, że

$$\frac{1 + 2 \cos 88^\circ \cdot \cos 2^\circ}{\cos^2 2^\circ - \cos 88^\circ \cdot \sin 2^\circ} = \frac{1 + \operatorname{tg} 2^\circ}{1 - \operatorname{tg} 2^\circ}.$$

6. [za całe zadanie 4p.]

Oblicz wartość liczbową wyrażenia: $\frac{\sin 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ - \cos 45^\circ}{\operatorname{ctg} 60^\circ}$

7. [za każdy podpunkt 2p.]

Podaj wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α wiedząc, że:

a) $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ b) $\cos \alpha = -\frac{1}{5}$

c) $\operatorname{ctg} \alpha = 5$ d) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3}$

8. [za całe zadanie 3p.]

Rozwiąż równanie $\sin 2x + 2 \sin x + \cos x + 1 = 0$, dla $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

9. [za całe zadanie 3p.]

Rozwiąż nierówność $\cos 2x < \cos x$.

10. [za każdy podpunkt 2p.]

Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 50^\circ$

b) $\frac{2 \sin^2 15^\circ - 2 \cos^2 15^\circ}{2 \sin^2 15^\circ - 1}$

11. [za każdy podpunkt 2p.]

Podane wyrażenia doprowadź do najprostszej postaci:

a) $(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cdot \cos^2 \alpha$

b) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}$

12. [za każdy podpunkt 3p.]

Udowodnij tożsamość:

a) $1 + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}$

b) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \sin^2 \alpha$

c) $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1} = \cos^2 \alpha$

d) $\frac{1 + \operatorname{tg}^4 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$

e) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha}$

13. [za całe zadanie 3p.]

Oblicz $\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha + 2 \sin \alpha$, jeśli $\cos \alpha = \frac{2}{3}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

14. [za każdy podpunkt 3p.]

Wyznacz wartość liczbową każdego z poniższych wyrażeń (nie korzystaj z tablic ani z kalkulatora):

- a) $\operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{ctg} 140^\circ \cdot \operatorname{ctg} 150^\circ \cdot \operatorname{ctg} 160^\circ$,
- b) $\sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 230^\circ + \sin^2 240^\circ + \sin^2 250^\circ$,
- c) $(\cos^2 20^\circ + \cos^2 250^\circ) \cdot \operatorname{ctg} 20^\circ \cdot \operatorname{ctg} 250^\circ$,
- d) $\frac{1}{\operatorname{ctg} 30^\circ} \cdot \frac{1}{\operatorname{ctg} 40^\circ} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 140^\circ} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 250^\circ}$.

15. [za całe zadanie 3p.]

Oblicz $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta$, jeżeli $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\sin \beta = \frac{12}{13}$ i $\alpha, \beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

16. [za całe zadanie 3p.]

Wiadomo, że $\alpha \in (0, \pi)$ i $\sin \alpha = 2 \cos \alpha$. Oblicz $2 \sin \alpha - \cos^2 \alpha$.

17. [za całe zadanie 3p.]

Oblicz $\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta$, jeżeli $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\sin \beta = \frac{3}{5}$ i $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$.

18. [za całe zadanie 3p.]

Dany jest kąt $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ i $\operatorname{tg} \alpha = 3 \sin \alpha$. Oblicz $\sin \alpha + 2 \cos \alpha$.

19. [za każdy podpunkt 3p.]

Wyznacz wartości liczbowe poniższych wyrażeń, korzystając ze wzorów na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów:

- a) $\sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{4}$,
- b) $\cos \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{5\pi}{24} - \sin \frac{\pi}{8} \sin \frac{5\pi}{24}$,
- c) $\cos \frac{5\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{5\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8}$,
- d) $\frac{\operatorname{tg} \frac{11\pi}{12} - \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}}{1 + \operatorname{tg} \frac{11\pi}{12} \cdot \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}}$.

20. [za każdy podpunkt 3p.]

Rozwiąż równanie:

a) $\sin^2 x - \frac{3}{4} = 0,$

b) $\cos^2 x - \frac{3}{4} = 0,$

c) $\operatorname{tg}^2 x - 7 + 4\sqrt{3} = 0,$

d) $\operatorname{ctg}^2 - 7 - 4\sqrt{3} = 0.$

Maksymalna liczba punktów do zdobycia: 117p.

Punkty dodatkowe do innych działów $x \geq 80p.$

bdb. (5) $80p. > x \geq 70p.$

db.+ (4,5) $70p. > x \geq 65p.$

db. (4) $65p. > x \geq 55p.$

dst.+ (3,5) $55p. > x \geq 50p.$

dst. (3) $50p. > x \geq 30p.$

ndst. (2)