

DMAD - zasada włączania i wyłączania

Zasada włączania i wyłączania

Dla dowolnych zbiorów skończonych $A_1, A_2, A_3 \dots$

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2| &= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| \\ |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| &= |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \left(\sum_{J \subseteq [n], |J|=k} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right| \right) \\ &= |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| \\ &\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n| \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned}$$

A Zadania na ćwiczenia

Zadanie A.1. Ile jest ciągów binarnych długości 8, które zaczynają się jedynką lub kończą dwoma zerami?

Zadanie A.2. Ile jest dodatnich liczb całkowitych równych co najwyżej 1000 niepodzielnych ani przez 8, ani przez 6, ani przez 15?

Zadanie A.3. Ile całkowitoliczbowych rozwiązań ma równanie

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 70, \quad 0 \leq x_1 \leq 9, \quad 0 \leq x_2 \leq 9, \quad 0 \leq x_3 \leq 9, \quad 0 \leq x_4 \leq 9, \quad x_5 \geq 0?$$

Zadanie A.4. Na ile sposobów można ustawić $n, n \geq 2$, par małżeńskich w rzędzie tak, aby

- a) pewna para małżeńska stała obok siebie?
- b) żadna z par nie stała obok swojego męża?

Zadanie A.5. Na ile sposobów można włożyć 30 kul do 20 rozróżnialnych urn tak, aby w każdej urnie była co najmniej jedna kula, jeśli

- a) kule są nierozróżnialne?
- b) kule są rozróżnialne?

UWAGA: porównaj zadanie z zadaniem A.3. z zestawu o schematach wyboru.

B Zadania na ćwiczenia - jeśli czas pozwoli

Zadanie B.1. Karty z talii 52 kart rozłożono po 4 do 13 pudełek. Na ile sposobów można to zrobić (kolejność kart w pudełku jest nieistotna) tak, aby w żadnym z pudełek nie znalazły się jednocześnie wszystkie 4 karty o tej samej wartości (wartości kart to 2, ..., 10, W, D, K, A)?

Zadanie B.2. Ile jest rozwiązań równania w nieujemnych liczbach całkowitych:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{10} + x_{11} = 300,$$

przy dodatkowym założeniu, że $0 \leq x_i \leq 9$ dla $i = 1, \dots, 10$?

C Zadania do samodzielnej pracy w domu

Zadanie C.1. Ile jest dodatnich liczb całkowitych nie większych niż 100, które są nieparzyste lub są kwadratem liczby całkowitej?

Zadanie C.2. Ile jest 10-elementowych podzbiorów zbioru 52 kart, w których nie występuje żadna dama lub żaden kier lub żadna błotka (błotki to karty o wartości od 2 do 9)?

Zadanie C.3. Ile permutacji 26 liter alfabetu łacińskiego nie zawiera żadnego ze słów: ryba, krowa i pies?

Zadanie C.4. Na ile sposobów można utworzyć n -cyfrową liczbę nie zawierającą cyfry „0” tak, aby

- a) nie wystąpiła w niej liczba nieparzysta lub liczba 2 lub liczba 8;

- b) pewna z cyfr $1, 2, \dots, 9$ nie wystąpiła w utworzonej liczbie;
- c) każda z cyfr $1, 2, \dots, 9$ wystąpiła w utworzonej liczbie.

Zadanie C.5. Pewna pani ma w szafie 100 sukienek. Każdego dnia ubiera dokładnie jedną z nich. Na ile sposobów może wybierać sukienki przez cały rok tak, aby każda z sukienek była wybrana co najmniej raz (zakładamy, że rok ma 365 dni)?

Zadanie C.6. Alfabet łaciński ma 21 spółgłosek i 5 samogłosek. Ile jest ciągów długości 100 składających się z liter alfabetu łacińskiego takich, że każda spółgłoska występuje w nich co najmniej raz?

Zadanie C.7. Na ile sposobów możemy wybrać 20 kart z talii 52 tak, aby każda wartość blotki (każda z kart o wartości od 2 do 9) była wybrana co najmniej raz?

Zadanie C.8. Ile jest permutacji talii 52 kart takich, że

- a) pewne dwie damy sąsiadują ze sobą;
- b) żadne dwie **czarne** karty o tej samej wartości (wartości to: $2, 3, \dots, 10, W, D, K, A$) nie sąsiadują ze sobą.

Zadanie C.9. Jak zmieni się odpowiedź w zadaniu A.4, jeśli pary małżeńskie są usadzane przy okrągłym stole oraz istotne jest tylko kto siedzi obok kogo i po której stronie?